

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 30 september 2008

1. Tre rader med tal är skrivna på ett papper. Varje rad innehåller tre olika positiva heltal. För varje rad bildas summan och produkten av de tre talen. Talen är sådana att de tre radsummorna är lika, medan de tre produkterna är olika; produkten är minst för den första raden och störst för den tredje. Om det är givet att radsumman är den minsta möjliga som kan fås under villkoren ovan, bestäm denna summa och ange för varje rad de tre tal som ingår.
2. Givet är en spetsvinklig triangel. Två cirklar ritas med två av triangelns sidor som diametrar. Visa att en av cirklarnas skärningspunkter ligger på triangelns tredje sida.
3. Bestäm alla positiva heltal $a \leq b \leq c$ sådana att $a^3 + b^3 + c^3 = 2008$.
4. Finn alla icke-negativa lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - yz = x \\ y^2 - zx = y \\ z^2 - xy = z \end{cases} .$$

5. Visa att

$$xy + 2x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + xy^3$$

för alla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

6. Låt P_1, P_2, \dots, P_n vara n olika punkter i planet. Man markerar med blå färg mittpunkterna på alla möjliga sträckor mellan skilda punkter, dvs P_iP_j , $1 \leq i < j \leq n$. Vilket är det minsta möjliga antalet olika blå punkter?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 22 november 2008

1. En romb är inskriven i en konvex fyrhörning. Rombens sidor är parallella med fyrhörningens diagonaler, som har längderna d_1 och d_2 . Beräkna längden av rombens sida, uttryckt i d_1 och d_2 .
2. Bestäm det minsta heltal $n \geq 3$ med egenskapen att man kan välja två av talen $1, 2, \dots, n$ på ett sådant sätt att deras produkt är lika med summan av de övriga $n - 2$ talen. Vilka är de två talen?
3. Funktionen $f(x)$ har egenskapen att $\frac{f(x)}{x}$ är växande för $x > 0$. Visa att

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y), \quad \text{för alla } x, y > 0.$$

4. En konvex n -hörning har vinklar v_1, v_2, \dots, v_n (i grader), där alla v_k ($k = 1, 2, \dots, n$) är positiva heltal delbara med 36.
 - a) Bestäm det största n för vilket detta är möjligt.
 - b) Visa att om $n > 5$, så måste två av n -hörningens sidor vara parallella.
5. Anna och Örjan spelar följande spel: de börjar med ett positivt heltal $n > 1$ som Anna skriver som summan av två andra positiva heltal, $n = n_1 + n_2$. Örjan stryker ett av dem, n_1 eller n_2 . Om det återstående talet är större än 1 upprepas processen, d.v.s. Anna skriver det som summan av två positiva heltal, $n_3 + n_4$, Örjan stryker ett av dem etc. Spelet slutar när det återstående talet är 1. Örjan är vinnare om det finns två lika tal bland de tal som han har strukit, annars vinner Anna. Vem vinner spelet om $n = 2008$ och båda två spelar optimalt?
6. En uppdelning av talet 100 ges av ett positivt heltal n och n positiva heltal $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sådana att $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 100$. Bestäm det största möjliga värdet av produkten $x_1 x_2 \dots x_n$, då n, x_1, x_2, \dots, x_n varierar bland alla uppdelningar av talet 100.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Anm. Att inte längre tillåta formelsamling är en ny regel för i år.

Svar till uppgifterna i kval- och finaltävling finns i förekommande fall i slutet av denna tidning. Vill du ha fullständiga lösningar, hänvisas du till tävlingens hemsida. Den når man enklast via institutionens hemsida genom att klicka på "Tävlingar".