SMYCKESBUTIK I TOMTELAND

av Isac Hedén

En smyckeshandlare i Tomteland har utlyst en tävling under årets julskyltning. För att kunna genomföra denna har han satt upp två spikar på väggen i sin butik med några centimeters mellanrum, dock på samma höjd. Spikarna är till för att hänga upp halsband på, och var och en av dem är försedda med ett spikhuvud som är så stort att det hindrar upphängda halsband från att glida av. Tävlingen har två faser. Först väljer kunden sitt favorithalsband från butiken och hänger upp det på de två spikarna, därefter plockar butiksbiträdet fram sin tång, väljer en av de två spikarna, och drar loss den från väggen. Om halsbandet ändå hänger kvar så förblir det i butikens ägo, men om det trillar ned på marken så tillfaller det kunden.

Det finns förstås många sätt att hänga upp ett halsband på två spikar, man kan till exempel snurra det 5 varv runt den ena av spikarna och 4 varv runt den andra, eller hänga upp det som en åtta, eller bara rätt och slätt över de två. Halsbanden i butiken är av sådan kvalitet att de glider helt friktionsfritt runt spikarna, vilket innebär att ett upphängt halsband trillar ned så fort det är möjligt att deformera det på ett kontinuerligt sätt så att det inte längre löper runt någon spik (naturligtvis utan att dra det över något spikhuvud).

Kund efter kund efter kund försökte, men ingen förmådde att hänga halsbandet på ett vinnande sätt; butiksbiträdet kunde vid varje föreslagen upphängning välja en av de två spikarna och dra loss den utan att halsbandet trillade ned. Den allmäna uppfattningen bland kunderna var att smyckeshandlaren bluffade, och att det i själva verket inte var möjligt att vinna sitt favorithalsband.

Denna uppfattning delades av alla kunderna förutom en, nämligen stadens förnämste topolog, som även han hade vägarna förbi den här dagen. Han trodde inte sina ögon när han såg en efter en av kunderna misslyckas med denna enligt hans mening triviala uppgift. Topologen såg genast en affärsidé. Han ställde sig på gatan utanför och spikade upp inte bara två utan tio stycken spikar på rad på närmaste husfasad. Sedan hängde han upp ett halsband han hade med sig på dessa tio, och erbjöd förbipasserande att, för en billig penning, välja en av de tio spikarna och dra ut den. Om halsbandet, som gled friktionsfritt mot spikarna, hängde kvar även efter att den förbipasserande hade dragit ur spiken så betalade han tiofalt tillbaka den förbipasserandes insats. Om däremot halsbandet trillade ned till marken behöll topologen pengarna, spikade upp spiken igen, satte upp halsbandet på nytt, och väntade på nästa förbipasserande.

Det visade sig att topologens halsband trillade ned varje gång någon förbipasserande drog ur en spik, och vid dagens slut hade topologen tjänat så mycket pengar att han kunde gå in i smyckesaffären och köpa inte bara sitt eget favorithalsband, utan även ett vackert halsband till sin fru.

Problem:
Hur hängde topologen upp halsbandet på de tio spikarna för att det skulle vara beroende av var och en av dem för att inte trilla ned? Hur hänger man ett halsband på två spikar så att det är beroende av båda för att inte trilla ned? Går upphängningsmetoden att generalisera till n stycken spikar där n är ett godtyckligt positivt heltal?

Halsbandsproblemet

Lösning: Vi börjar med fallet två spikar. Vi tänker oss att vi utför vår upphängning genom att först koppla isär halsbandet och fästa den ena änden i en baspunkt belägen ett stycke under spikarna. Sedan betecknar vi operationen att dra den lösa änden ett varv medurs (respektive moturs) runt den vänstra spiken med a (respektive a^{-1}), och med b (respektive b^{-1}) betecknar vi operationen att dra den lösa änden medurs (respektive moturs) runt den högra. Efter att ha utfört dessa fyra operationer ett antal gånger kopplar vi ihop halsbandet igen (naturligtvis kan man åstadkomma samma upphängning utan att koppla isär halsbandet, det var bara för att kunna beskriva själva förfarandet). Så blir till exempel upphängningen som motsvarar att bara hänga halsbandet över de två spikarna ab, och om man vill hänga halsbandet som en åtta kan man utföra till exempel ab^{-1}. Vidare lägger vi märke till att dra ut en spik, till exempel den vänstra, motsvarar att göra om intet alla varv man dragit halsbandet runt den spiken, dvs. stryka allt vad a eller a^{-1} heter i uttrycket som beskriver upphängningen. Därför skulle upphängningen $aba^{-1}b^{-1}$ vara vinnande. Drar butiksbiträdet ut den vänstra spiken, stryker vi a och a^{-1}, och kvar blir bb^{-1} så halsbandet trillar ned, och motsvarande om biträdet drar ut den andra spiken.

Säg då att vi har kommit på ett sätt att lösa problemet för n stycken spikar, nämligen en upphängning A som uttrycks som ett ord från alfabetet $\{a_i, a_i^{-1}\}_{i=1}^{n}$, där vi med a_i betecknar ett varv medurs runt spik nummer i, och med a_i^{-1} ett varv moturs. Om vi lägger till en spik, kan vi göra upphängningen $Aa_{n+1}A^{-1}a_{n+1}^{-1}$, där A^{-1} betecknar ordet man får genom att skriva A baklänges samtidigt som man ersätter alla a_i med a_i^{-1} och alla a_i^{-1} med a_i. Om vi vill lösa uppgiften för tre spikar, och använder alfabetet $\{a, b, c\}$, kan vi alltså hänga upp halsbandet enligt

$$aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}.$$

(stryk en av bokstäverna a, b och c, förenkla och se att halsbandet trillar ned). Denna metod att hänga upp halsbandet så att det blir beroende av var och en av spikarna för att hänga uppe fungerar uppenbarligen, men kräver att man lindar det fler och fler varv runt varje spik när antalet spikar ökar; om det går åt k operationer för n spikar, kommer det att krävas $2k+2$ operationer för $n+1$ stycken. Det finns dock effektivare metoder för att hänga upp halsbandet så att det blir beroende av varje spik. Till exempel i fallet $n = 4$, skulle vi med den angivna metoden få upphängningen

$$(aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1})d(aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1})^{-1}d^{-1},$$

i alfabetet $\{a, b, c, d\}$, men ett effektivare sätt är att hänga upp det enligt $ABA^{-1}B^{-1}$, där $A = aba^{-1}b^{-1}$, och $B = cdc^{-1}d^{-1}$. Då går det åt 16 operationer istället för 22.

Topologiskt sett är det vi undersöker ett n gånger punkterat plans fundamentalgrupp, där varje halsbandsupphängning motsvarar ett element (upp till konjugering, då vi inte har någon naturlig baspunkt för halsbandet). Vi väljer generatorer a_i som korresponderar till loopar medurs runt spik/punktering nummer i. Att dra ut en spik motsvarar att kvota fundamentalgruppen med relationen $a_i \sim e$, där a_i är generatorn tillhörande spik nummer i, och där e är identitetselementet. Uppgiften blir, uttryckt i dessa termer, att hitta ett element i fundamentalgruppen för ett n gånger punkterat plan som avbildas på enhetselementet under varje kvotprojektion

$$\pi_i : G \longrightarrow G/(a_i \sim e), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$