

### Några sannolikhetsproblem som vi ska studera den 20 april

1. I ett lotteri med fem lotter ger tre vinst. Fem personer,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  och  $E$  drar var sin lott. Vad är sannolikheten att  $A$  drar en av de tre vinstlotterna? Vad är sannolikheten att varken  $A$  eller  $B$  får någon vinst?
2. På en biograf visar man varje kväll film i var och en av de fyra salongerna (det är fyra olika filmer). Oberoende av varandra köper fyra syskon en tisdagskväll var sin biljett till en slumpmässigt vald film. Vad är sannolikheten att syskonen ser fyra olika filmer? Vad är sannolikheten att alla syskonen ser samma film? Vad är sannolikheten att högst tre av syskonen ser samma film?
3. På ett rutbräde med  $3 \times 3$  rutor placerar man ut tre brickor slumpmässigt. Det är tillåtet med flera brickor i samma ruta. Vad är sannolikheten att man får en bricka i varje rad och varje kolumn?
4. På vanliga bilskyltar kan tresiffriga kombinationer från 001 till 999 förekomma. Låt oss för enkelhets skull också ta med numret 000 så att vi får ettusen olika kombinationer.
  - a) Vad är sannolikheten att numret på en slumpmässigt vald bil består av tre olika siffror?
  - b) Vad är sannolikheten att numret på en slumpmässigt vald bil består av tre olika siffror i växande ordning, t ex 146?
  - c) På ett bord ligger tio sifferbrickor med siffrorna  $0, 1, \dots, 9$ . Vi väljer ut tre av brickorna och sätter ihop till ett bilnummer. Vad är sannolikheten att numret innehåller siffrorna 1, 4 och 6 i någon ordning? Vad är sannolikheten att man får just numret 146?
5. Låt oss anta att det alla dagar på året är lika många människor som har födelsedag. Vad är sannolikheten att samtliga 20 elever i en klass fyller år på olika dagar? I ett främmande land är alla klasser lika stora. I ungefär hälften av klasserna gäller det att eleverna fyller år på olika dagar, i den andra hälften är det åtminstone två elever som delar födelsedag. Hur många elever är det i varje klass?
6. I fickan har jag två lakritsbåtar och en hallonbåt. Utan att titta i fickan väljer jag ut två karameller på måfå. Vad är sannolikheten att få en lakritsbåt och en hallonbåt? Antag att jag har  $m$  stycken lakritsbåtar och  $n$  stycken hallonbåtar och väljer två karameller slumpmässigt. Går det att bestämma talen  $m$  och  $n$  så att sannolikheten för att få en karamell av varje typ blir  $\frac{1}{2}$ ? Finns det flera lösningar?
7. En fotbollsdomare har tre kort i sin ficka, ett som är rött på båda sidor, ett som är gult på båda sidor och ett som är gult på den ena sidan och rött på den andra. (Gult kort betyder varning och rött kort utvisning.) En spelare sparkar en motståndare på benen. Domaren väljer då ett av korten och visar upp en av sidorna på det valda kortet. Kort och sida väljs helt slumpmässigt.

Låt oss bortse från problemet om spelaren blir varnad eller utvisad och i stället fundera över följande. Antag att domaren visar upp en gul kortsida. Vad är sannolikheten att också baksidan av det valda kortet är gul?

8. Två personer,  $A$  och  $B$ , singlar omväxlande slant tills någon av dem får "krona". Antag att  $A$  börjar. Vad är sannolikheten att  $A$  blir först med att få "krona"?
9. Låt oss singla slant 25 gånger. Om vi låter krona betecknas med 1 och klave med 0 kommer vi att få 25 siffror, omväxlande 1:or och 0:or, t ex 1111010100001011100001010. Sifferföljden bildar delföljder med idel 1:or och idel 0:or. I exemplet har vi först en delföljd med 4 stycken 1:or, sedan en delföljd med en enda 0:a, sedan en delföljd med en enda 1:a osv och vi får totalt i detta fall 14 delföljder. Om vi gör om försöket med 25 slantsinglingar i varje försök kommer antalet delföljder att variera. Vad blir det genomsnittliga antalet delföljder om vi upprepar försöket ett mycket stort antal gånger?
10. (Svårt problem!) Två personer,  $A$  och  $B$  kastar omväxlande tärning tills någon av dem får sexa, men de använder speciella regler. Antag att  $A$  börjar. Om  $A$  får en sexa direkt har  $A$  vunnit. Om  $A$  exempelvis får en trea är det  $B$ 's tur att försöka, men det gäller för henne/honom att "slå högre" än  $A$ , dvs om  $B$  då får 1, 2 eller 3, får  $B$  slå om och får hålla på tills hon/han har fått 4 eller mer. Om  $B$  exempelvis får 5, är det återigen  $A$ 's tur och eftersom  $A$  får hålla på tills utfallet har blivit högre än 5, kommer  $A$  till slut att få en sexa och i detta exempel således vinna. Men vad blir sannolikheten att  $A$  blir först med att få en sexa?
11. (Extremt svårt!) På planet från Arlanda till Malmö är alla platser bokade. Först ombord är den från TV kände Mr X, som visserligen också har en plats bokad, men som inte orkar leta reda på sin plats utan väljer en stol helt slumpmässigt. Nästa passagerare, som vi kan kalla  $A$ , sätter sig däremot på sin bokade plats såvida inte Mr X redan har satt sig på  $A$ 's plats. I det senare fallet väljer  $A$  en plats slumpmässigt i kabinen. Den tredje passageraren som går ombord, här kallad  $B$ , agerar på samma sätt:  $B$  sätter sig på sin bokade plats eller, om den råkar vara upptagen, väljer en av de tomma platserna slumpmässigt. Alla de övriga passagerarna betar sig på samma sätt, en efter en, tills planet är fullt.  
Frågan är nu: Vad är sannolikheten att den sist anlända passageraren får sitta på sin bokade plats?

12. I ett hus med 100 våningsplan testar man hållfastheten hos en glaskula. Vi vet att om en kula som släpps från våning  $k$  går sönder, så går den också sönder om den släpps från varje annat högre våningsplan. Om den däremot håller när den släpps från våning  $k$ , håller den också när den släpps från varje annat lägre våningsplan. Vi antar att hållfastheten inte förändras om kulan kastas flera gånger utan att gå sönder. Vi söker det lägsta våningsplan  $N$  från vilket kulan säkert kommer att gå sönder.
- Hur många försök krävs i sämsta fall för att fastställa  $N$ . Försöket avbryts förstas så snart kulan har gått sönder.
  - Följande fråga är nog något svårare. Antag att vi har två kulor med identiska hållfastegenskaper. Vilken strategi bör vi använda för att minimera antalet försök i det sämsta tänkbara fallet? Hur många försök krävs i detta fall för att fastställa  $N$ ?