Kommentarer till några av problemen från den 20 april 2007

1. P(A får en vinst) $= \frac{3}{5}$; P(varken A eller B får någon vinst) $= \frac{1}{10}$.

2. P(fyra olika filmer)$= \frac{3}{32}$; P(alla ser samma film)$= \frac{1}{64}$; P(högst tre ser samma film)$= \frac{63}{64}$.

3. P(olika rader och kolumner)$= \frac{4}{81}$.

4. P(olika siffror)$= 0.72$; P(olika siffror i växande ordning)$= 0.12$; P(numret 146)$= 0.001$; P(nummer med siffrorna 1, 4, och 6)$= 0.006$.

5. P(de 20 fyller år skilda dagar)$= \frac{365!}{345! \cdot 365^{20}} \approx 0.59$. Antalet elever i det andra fallet är 23.

6. Om vi ordnar hallonbåtarna i rad i fickan, så har vi följande tre ordningsföljder: HLL, LHL och LLH. Låt de båda första i varje ordning vara de karameller som väljs. I det första fallet väljer jag alltså HL, i det andra LH och i det tredje LL. I två fall av tre får jag följaktligen två olika karameller. Sannolikheten för två olika är alltså $\frac{2}{3}$.

I det allmänna fallet kan vi låta n vara antalet karameller totalt, varav h stycken hallonbåtar. Vi kan få två olika karameller på två sätt, antingen drar vi en hallonbåt först och sedan en lakritsbåt eller också tvärtom. Denna sannolikhet blir:

$$\frac{h}{n} \cdot \frac{n-h}{n-1} + \frac{n-h}{n} \cdot \frac{h}{n-1} = 2 \cdot \frac{h}{n} \cdot \frac{n-h}{n-1}.$$

Men detta ska vara lika med $\frac{1}{2}$, vilket ger

$$4h(n-h) = n(n-1), \text{ varav } n^2 - 4nh + 4h^2 = n \text{ eller } (n-2h)^2 = n.$$

Men det betyder att n är kvadraten på ett heltal, låt oss säga k^2, och vi får $(k^2 - 2h)^2 = k^2$. Om vi drar roten ur bägge leden, får vi

$$k^2 - 2h = \pm k, \text{ och vi får lösningarna } h = \frac{k^2 \pm k}{2},$$

där k är ett godtyckligt kvadrattal ≥ 2.

För $k = 2$ är $n = 4$, medan $h = 1$ eller $h = 3$. För $k = 3$ är $n = 9$, medan $h = 3$ eller $h = 6$, osv. Kontroll visar att båda lösningarna duger för varje värde på k. Detta är förstås logiskt, ty om 1 hallonbåt och tre lakritsbåtar är en lösning, måste också tre hallonbåtar och en lakritsbåt vara en lösning.

7. P(baksidan är gul)$= \frac{2}{3}$. Vi har en möjlighet att få en gul sida med det rödgula kortet, men vi har två möjligheter att få en gul sida med det helgula kortet, där alltså baksidan är gul.

8. Här kommer en alternativ lösning till uppgiften.

Sannolikheten för att A vinner är

$$\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^5 + (\tfrac{1}{2})^7 + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{2}{3}$$

enligt formeln för en geometrisk summa. Genom att bryta ut faktorn $(\frac{1}{2})^2$ ur termerna $2, 3, \ldots$ kan vänsterledet också skrivas som

$$\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 \big(\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^5 + (\tfrac{1}{2})^7 + \ldots \big).$$

dvs uttrycket inom parentesen är lika med det ursprungliga vänsterledet. Om detta är p får vi sambandet

$$p = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot p, \text{ som ger } \tfrac{3}{4}p = \tfrac{1}{2}, \text{ dvs } p = \tfrac{2}{3}.$$

9. Betrakta två slantsinglingar i rad. Vi kan då få kombinationerna 11, 00, 10 eller 01. Om myntet är balanserat har de fyra kombinationerna samma sannolikhet att uppträda, dvs det är lika stor chans för byte av sida från krona till klave eller klave till krona som att de båda myntkasten ger samma sida upp. Varje gång som vi går från en delföljd till en annan har vi byte från krona till klave eller klave till krona (i exemplet med 14 delföljder har sådana byten skett 13 gånger). Med 25 myntkast finns det 24 ställen där byten kan ske, dvs mellan myntkast 1 och 2, mellan 2 och 3, osv. Men om det är lika stor chans för att byta som för att inte byta, blir det i genomsnitt 12 byten, dvs i genomsnitt 12 ”skarvar” mellan delföljder och alltså i genomsnitt 13 delföljder. De 14 delföljder som vi noterade ligger således mycket nära det genomsnittliga värdet.

10. Vi börjar med att betrakta en tärning med två möjliga utfall, 5 och 6, som inträffar med lika sannolikheter, $\frac{1}{2}$. Då vinner A om denne får 6:a direkt, medan B vinner om A får 5:a, eftersom B då får 6:a. Med två utfall är alltså sannolikheten att A vinner $\frac{1}{2}$.

Antag att vi i stället har en tärning med tre möjliga utfall, 4, 5 och 6, som inträffar med lika sannolikheter, $\frac{1}{3}$. Då vinner A om denne får 6:a direkt, medan B vinner om A får 5:a. Dessa händelser har samma sannolikhet att inträffa. Om A får 4:a, så vinner B om denne får 6:a i nästa kast, medan A vinner om B i stället får 5:a. Dessa båda händelser har också lika sannolikheter, vilket betyder att A och B har lika stor chans att vinna om tärningen har tremöjliga utfall. Med tre utfall är alltså sannolikheten att A vinner $\frac{1}{2}$.

Om vi fortsätter med att utöka antalet utfall till fyra, 3, 4, 5 och 6, vinner A om denne får 6:a direkt; B vinner om A får 5:a i det första kastet. Dessa händelser har samma sannolikhet att inträffa. Om A får 4:a i det första kastet är situationen i fortsättningen densamma som om man hade använt en tärning med två utfall, och vi såg ovan att spelarna då hade lika stor chans att vinna. Om A får 3:a i det första kastet är situationen i fortsättningen densamma som om man hade använt en tärning med tre utfall, och vi såg ovan att spelarna också då hade lika stor chans att vinna. Med fyra utfall är alltså sannolikheten än en gång $\frac{1}{2}$ att A vinner.

Så här kan vi hålla med att utöka antalet utfall ett steg i taget och vi kommer varje gång att få vinstsannolikheten $\frac{1}{2}$ för vardera spelaren, vilket därmed är det sökta svaret.

11. Vi låter N (≥ 2) vara antalet platser i planet och betecknar passagerarna med $A_1, A_2, \ldots, A_N$, där A_2 är Mr X. Vi numrerar platserna från 1 till N

och antar att A_k har bokat plats nr k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Vi antar vidare att passagerarna går ombord i ordningen A_2, $A_N, A_{N-1}, \ldots, A_3, A_1$. För varje N låter vi P_N beteckna sannolikheten för att A_1 får sin bokade plats, dvs nr 1. Uppenbarligen är $P_2 = \frac{1}{2}$, eftersom A_2 då har att välja mellan två platser. Men vad gäller för andra värden på N? Låt oss använda en teknik liknande den i uppgift 10 och visa att det blir samma sannolikhet för att den siste får sin plats, $\frac{1}{2}$ om det är tre platser i planet. Därefter visar vi att det blir samma sak med fyra platser. Så kan vi fortsätta och vi finner att det inte spelar någon roll hur många platser det är i planet; sannolikheten blir likafullt $\frac{1}{2}$. Detaljerna följer här nedan.

Antag fortsättningsvis att $N \geq 3$. Låt oss studera konsekvenserna av att A_2 väljer plats nr s för olika värden på s. Om $s = 1$ kommer A_1 att missa sin plats, men får behålla den om $s = 2$. För $s > 2$ kommer uppenbarligen $A_N, A_{N-1}, \ldots, A_{s+1}$ att få sitta på sina bokade platser, medan A_s får lov att välja en av de övriga platserna slumpmässigt, vilket i sin tur påverkar placeringen för $A_{s-1}, A_{s-2}, \ldots, A_3, A_1$. Det betyder att A_s ikläder sig nästan samma roll som A_2 gjorde från början. Enda skillnaden är att A_2 har bokat plats nr 2 och A_s plats nr s för något $s > 2$.

Den betingade sannolikheten för att A_1 får sin plats givet att A_2 har valt plats nr s är följaktligen 0 för $s = 1$ och 1 för $s = 2$. För $s \geq 3$ ska som sagt A_s välja bland de återstående $s - 1$ lediga platserna. Nämnda betingade sannolikhet kommer då att bli densamma som sannolikheten för att A_1 hamnar rätt i ett plan med $s - 1$ platser från början, dvs P_{s-1}.

Eftersom A_2 väljer platserna $1, 2, \ldots, N$ med lika sannolikheter, $1/N$, så gäller enligt lagen om total sannolikhet att

$$
\begin{aligned}
P_N &= \sum_{s=1}^{N} P(A_2 \text{ väljer } s) \cdot P_(A_1 \text{ får sin plats } |A_2 \text{ väljer } s) \\
&= \tfrac{1}{N} \cdot P_{N-1} + \tfrac{1}{N} \cdot P_{N-2} + \ldots + \tfrac{1}{N} \cdot P_2 + \tfrac{1}{N} \cdot 1 + \tfrac{1}{N} \cdot 0,
\end{aligned}
$$

(vi har vänt på summationsordningen) varav

$$
(1) \qquad N \cdot P_N = P_{N-1} + P_{N-2} + \ldots + P_2 + 1 + 0.
$$

Om vi adderar P_N till bägge leden får vi

$$
(2) \qquad (N+1) \cdot P_N = P_N + P_{N-1} + P_{N-2} + \ldots + P_2 + 1 + 0.
$$

Om vi i (1) byter ut N mot $N + 1$ får vi

$$
(3) \qquad (N+1) \cdot P_{N+1} = P_N + P_{N-1} + P_{N-2} + \ldots + P_2 + 1 + 0.
$$

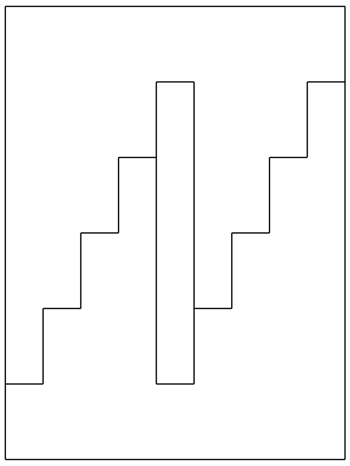
Subtraktion av ekv 2 från ekv 3 ger

$$
(N+1)(P_{N+1} - P_N) = 0,
$$

varav följer att $P_{N+1} = P_N$ för $N = 2, 3, \ldots$. Men eftersom $P_2 = \frac{1}{2}$ är därför $P_3 = P_4 = P_5 = \ldots$ alla lika med $\frac{1}{2}$. Sannolikheten att A_1 får sin plats är således $\frac{1}{2}$ oavsett hur många passagerare som finns i planet.

Mattproblemet. Det gällde att dela en rektangulär mattbit i storleken 10×10 m i två delar och jämte en annan mattbit i storleken 1×8 m täcka golvet i en sal med bredden 9 m och längden 12 m.

Lösning.

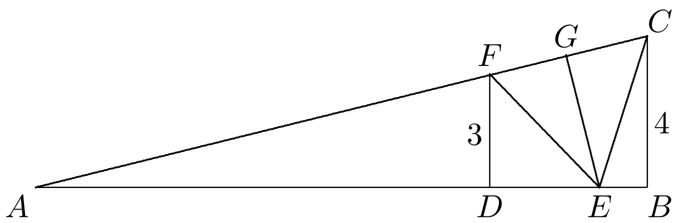


Flaggproblemet. En flagga som har formen av en liksidig triangel hängs upp mellan två vertikala stolpar av längder 3 och 4 m. En sida är därvid utsträckt mellan stolparnas toppar, medan det tredje, fria hörnet precis nuddar marken mellan stolparna. Hur långt är det mellan stolparna?

Lösning. Stolpen DF har längden 3 m och stolpen BC längden 4 m. Flaggan markeras med den rätvinkliga triangeln CEF. Vi förlänger sidan BD över D och sidan CF över F, så att den rätvinkliga triangeln ABC bildas (se figuren). Vi noterar att triangeln ADF är topptriangel till triangeln ABC. Detta betyder att om den liksidiga triangeln (flaggan) har sidan a, dvs $|FC| = a$, så har sträckan AF längden $3a$. Om vidare avståndet mellan stolparna är x, dvs $|DB| = x$, så har sträckan AD längden $3x$. Låt GE vara höjden mot sidan CF i triangeln CEF. Vi observerar att G delar sidan CF mitt itu. Höjden är lika med $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Eftersom triangeln AGE är likformig med triangeln ABC, gäller att

$$\frac{4}{4x} = \frac{a\sqrt{3}/2}{7a/2},$$

(AG har längden $3a + \frac{a}{2}$) varav följer att $x = 7/\sqrt{3} \approx 4,04$.



Ett ”nytt” problem följer på nästa sida!

Extra problem (förekom i en tidskrift 1997). Ernst, Sigmund och Anna sitter en kväll och småpratar framför brasan. Plötsligt säger Ernst: ”Om man lägger ihop siffrorna i mitt födelseår får man faktiskt min ålder.” Sigmund, som är några år äldre än Ernst, tänker en kort stund och konstaterar sedan förvånat: ”Det blir samma sak för mig; om man lägger ihop siffrorna i *mitt* födelseår stämmer summan med *min* ålder.” Den matematiskt sinnade Anna grubblar ett tag varefter hon utbrister: ”Då ber jag att få gratulera er båda på födelsedagen!”

När ägde denna konversation rum? Tilläggas bör att detta inträffade vid det senaste tillfället (före 1997) som det skulle varit möjligt för Anna att dra nämnda slutsats. Det bör också nämnas att detta är ett rent matematiskt/logiskt problem och att det inte är några tolkningsfällor i formuleringarna. Alla yttranden fälldes under en och samma dag. Förekommande åldrar anges i hela år. En person anses exempelvis vara 47 år fr o m det datum som vederbörande fyller 47 t o m dagen innan personen fyller 48. (Förresten: Var kommentaren att de träffades före 1997 nödvändig?)

Svarsförslag kan skickas till mig: *dag@math.uu.se*