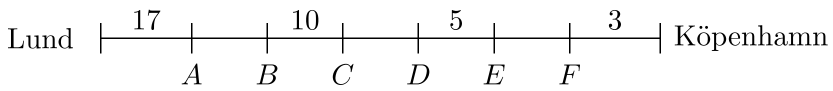
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 2 oktober 2002

1. Nio kronor fördelas på fyra barn, som alla är minst ett år gamla, så att varje barn får lika många kronor som sin ålder (i hela år). Visa att minst två av barnen är lika gamla.

2. Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att
$$x^2 - 3xy = 2002.$$

3. På järnvägslinjen Lund – Köpenhamn stannar tåget, utöver vid ändstationerna, vid ytterligare 6 stationer, här för enkelhets skull benämnda i alfabetisk ordning från A till F. En morgon avreser Hans och 16 andra passagerare från Lund, somliga är svenskar, resten är danskar. Hans, som känner samtliga medresenärer, noterar att vid varje station, utom ändstationerna, stiger lika många passagerare av som det är danskar ombord vid ankomsten till stationen. Inga nya passagerare tillkommer under denna resas gång. Hans noterar vidare att 10 resenärer finns ombord när tåget lämnar station B, att 5 finns kvar när tåget går från D och att 3 finns kvar på tåget när han själv stiger av vid F.
Hur många svenskar och hur många danskar var med på tåget från början och hur förändrades dessa antal under resans gång?



4. I fyrhörningen $ABCD$ är $|AB| = |BC| = 1$. Vinkeln B är $102°$ och vinkeln D $129°$. Bestäm längden av sträckan BD.

5. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x = 1 + \ln y \\ y = 1 + \ln z \\ z = 1 + \ln x. \end{cases}$$

6. Två cirklar med samma radie klipps ut ur en kartong. På randen till varje cirkel markeras hörnen i en regelbunden $2n$-hörning. Hälften av hörnen på varje cirkel målas gula, hälften målas blå. Cirklarna placeras ovanpå varandra så att hörnen sammanfaller. Vi får då $2n$ par av hörn. Om ett blått hörn på den ena cirkeln sammanfaller med ett blått hörn på den andra cirkeln, eller om ett gult hörn sammanfaller med ett gult, har vi ett matchande par. Visa att cirklarna kan placeras på ett sådant sätt att vi har minst n matchande par.

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress
www.math.uu.se/~dag/skolornas.html