SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 2 oktober 2002

1. Antag omvänt att det inte finns två barn som är lika gamla. Eftersom alla barn är minst ett år gamla måste summan av de fyra åldrarna vara $\geq 1+2+3+4=10$. Men detta motsäger förutsättningen att barnens sammanlagda ålder är 9.

   Alternativ lösning. Vi bildar alla kombinationer av åldrar som ger summan 9. Eftersom alla barn är minst ett år gamla får vi följande fall (med talen ordnade i växande storlek):

   $$(1,1,1,6) \quad (1,1,2,5) \quad (1,1,3,4) \quad (1,2,2,4) \quad (1,2,3,3) \quad (2,2,2,3).$$

   I samtliga sex fall är det alltid någon ålder som dubbleras.

2. Ekvationen kan skrivas
   $$x(x-3y)=2002.$$
   Eftersom $x > x-3y$ måste vi ha $x > \sqrt{2002}$. Vi finner att $44^2 = 1936$ och $45^2 = 2025$. Följaktligen är $x \geq 45$. Faktorisering av högerledet leder till ekvationen
   $$x(x-3y) = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$
   Tänkbara värden på x får vi genom att multiplicera lämpligt valda primfaktorer i högerledet så att produkten är ≥ 45. Vi har tre sådana produkter innehållande två faktorer: $7 \cdot 11 = 77$, $7 \cdot 13 = 91$ och $11 \cdot 13 = 143$.
   Med $x = 77$ blir $x - 3y = 2 \cdot 13 = 26$, varav $3y = 51$ eller $y = 17$. Med $x = 91$ blir $y = 23$, medan $x = 143$ ger $y = 43$.
   Vi har fyra produkter bildade av tre primfaktorer, nämligen $2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$, $2 \cdot 7 \cdot 13 = 182$, $2 \cdot 11 \cdot 13 = 286$ och $7 \cdot 11 \cdot 14 = 1001$. För dessa x-värden får vi i tur och ordning y-värdena 47, 57, 93, 333.
   Slutligen finns det en produkt där alla fyra primfaktorerna ingår, dvs talet 2002 självt. För detta x-värde blir $y = 667$.

   SVAR: Ekvationen har följande åtta lösningspar:

x	2002	1001	286	182	154	143	91	77
y	667	333	93	57	47	43	23	17

3. Låt d_L ange antalet danskar vid avgång från Lund och $d_A, d_B, \ldots, d_F$ antalet danskar vid avgång från resp $A, B, \ldots, F$.
   Låt vidare x, y, z vara totala antalet passagerare vid avgång från resp A, C och E. Vi får då följande uppställning:

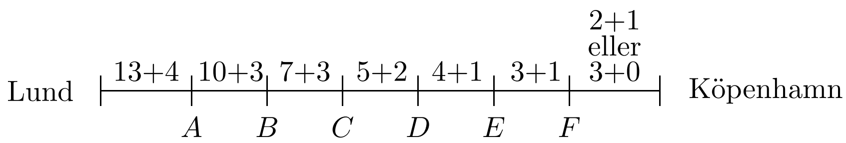
Vid avgång från station	Antal passagerare ombord
Lund	17
A	$x = 17 - d_L$
B	$10 = x - d_A = 17 - (d_L + d_A)$
C	$y = 10 - d_B$
D	$5 = y - d_C = 10 - (d_B + d_C)$
E	$z = 5 - d_D$
F	$3 = z - d_E = 5 - (d_D + d_E)$

Från B-raden får vi att $d_L + d_A = 7 \quad (1)$;
från D-raden följer att $d_B + d_C = 5 \quad (2)$;
från F-raden får vi att $d_D + d_E = 2 \quad (3)$.
Men $d_L \geq d_A \geq d_B \geq d_C \geq d_D \geq d_E \geq d_F$ och det måste enligt (1) gälla att $d_A \leq 3$ och enligt (2) att $d_B \geq 3$ och därmed att $d_A = d_B = 3$. Enligt (1) är $d_L = 4$. Men enligt (2) är då $d_C = 2$. Enligt (3) är $d_D \geq 1$. Men eftersom Hans stiger av vid station F måste antalet danskar ombord vid avgång från E vara positivt, dvs $d_E \geq 1$. Således är $d_D = 1$ och $d_E = 1$. Sammanfattningsvis får vi

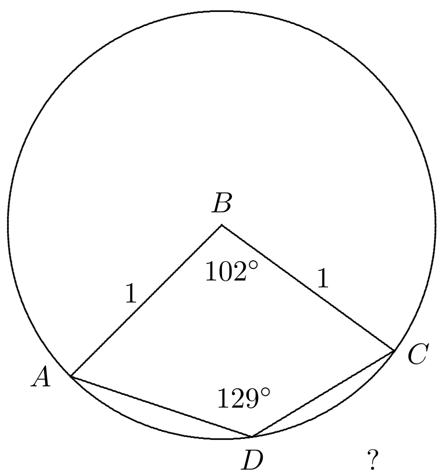
$$d_L = 4,\ d_A = 3,\ d_B = 3,\ d_C = 2,\ d_D = 1,\ d_E = 1.$$

Eftersom vi inte vet om Hans är svensk eller dansk kan vi inte avgöra hur många danskar som fanns ombord vid avgång från F. Det var 13 svenskar och 4 danskar på tåget när det lämnade Lund, 10 svenskar och 3 danskar var kvar efter A, 7 svenskar och 3 danskar var kvar efter B, 5 svenskar och 2 danskar var kvar efter C, 4 svenskar och 1 dansk var kvar efter D samt 3 svenskar och 1 dansk var kvar vid avgång från E. Vid avgång från F fanns tre personer kvar på tåget. Bland dem var två svenskar och en dansk (om Hans är svensk) eller tre svenskar (om Hans är dansk).

Svar: Antalet svenskar och danskar ombord efter varje station (första talet anger antalet svenskar) var:

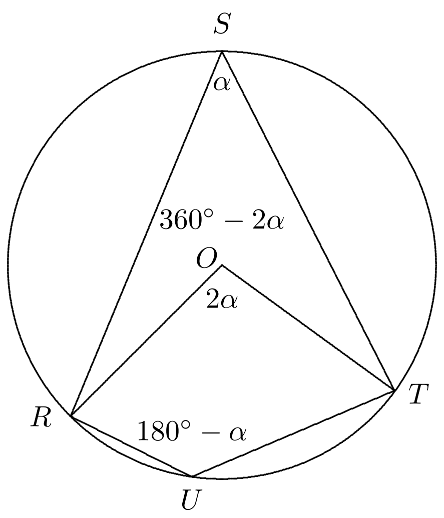


4. Låt oss börja med att dra en cirkel med medelpunkt B och radien 1. Cirkeln går då genom hörnen A och C. Vi frågar oss då hur hörnet D ligger i förhållande till cirkeln. Är det möjligen så att D ligger på nämnda cirkel?



Figur 1

Vi undersöker detta med hjälp av *randvinkelsatsen.*
Låt fyrhörningen $RSTU$ vara inskriven i en cirkel med medelpunkt O. I figur 2 är vinkeln RST en randvinkel och vinkeln ROT en medelpunktsvinkel på samma båge. Enligt randvinkelsatsen är då medelpunktsvinkeln dubbelt så stor som randvinkeln (i figuren 2α resp α). Observera att också vinkeln RUT är en randvinkel som står på samma båge (nu den "motsatta bågen") som medelpunktsvinkeln ROT (av storlek $360° - 2\alpha$) och det följer av satsen att vinkeln RUT är $180° - \alpha$.



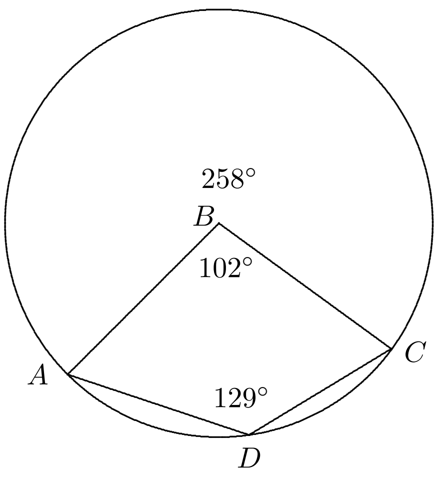
Figur 2

Satsens omvändning gäller också: Om ROT är en medelpunktsvinkel av storlek 2α och vinkeln RST (med samma orientering) är av storlek α, så måste också punkten S ligga på cirkeln, dvs RST är en randvinkel.

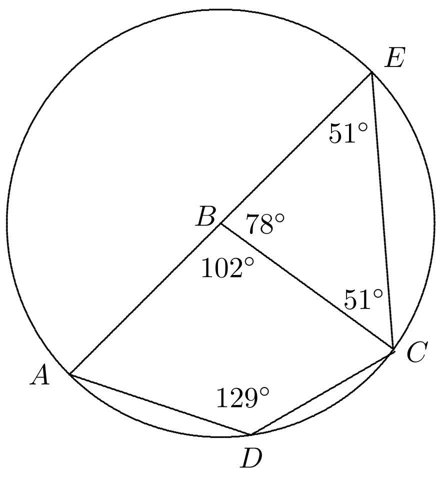
Vi noterar vidare att motstående vinklar i en fyrhörning som är inskriven i en cirkel är supplementvinklar (som exempel har vi S och U), dvs är tillsammans $180°$. Omvändningen gäller också: Om motstående vinklar i en fyrhörning $RSTU$ är supplementvinklar så kan fyrhörningen inskrivas i en cirkel.

Vi återgår till ursprungsproblemet och noterar att det finns två medelpunktsvinklar ABC, den ena av storlek $102°$, den andra av storlek $258°$. Men den senare är dubbelt så stor som vinkeln ADC, som är $129°$. Enligt nämnda omvändning till randvinkelsatsen måste vinkeln ADC vara en randvinkel i cirkeln och hörnet D ligger således på cirkeln. Sträckan BD är följaktligen en radie i cirkeln och har längden 1. (Se figur 3.)

Alternativt kan vi dra diametern AE. Triangeln EBC är likbent med toppvinkeln $78°$ och vardera basvinkeln $51°$. I fyrhörningen $AECD$ är alltså de motstående vinklarna E och D tillsammans $180°$, vilket enligt ovan betyder att också hörnet D ligger på cirkeln. (Se figur 4.)



Figur 3



Figur 4

Svar: Längden av sträckan BD är 1.

5. Med tanke på symmetrin i de tre variablerna ligger det nära till hans att undersöka fallet $x = y = z$. Systemet övergår då i den enda ekvationen $x = 1 + \ln x$, som tydligen har lösningen $x = 1$. Följaktligen är $x = y = z = 1$ en lösning till ekvationssystemet. Finns det fler lösningar?

   Vi har konstaterat att funktionen $g(x) = x - 1 - \ln x$ är lika med 0 för $x = 1$. Hur uppför sig denna funktion för övriga värden på x? Derivering ger

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x}\,,$$

   som är lika med 0 för $x = 1$ (enbart). Vidare är $g'(x) < 0$ för $0 < x < 1$ och > 0 för $x > 1$, vilket betyder att $g(x)$ antar minimivärdet 0 för $x = 1$. Sammanfattningsvis är $1 + \ln x \leq x$ för alla $x > 0$, med likhet om och endast om $x = 1$. Om $x = y = z$ kan vi vi därför endast ha lösningen $x = y = z = 1$.

   Finns det någon lösning för vilken x, y och z inte alla är lika? Om vi använder nämnda olikhet i ekvation 1 finner vi att $x = 1 + \ln y \leq y$, i ekvation 2 att $y = 1 + \ln z \leq z$ och i ekvation 3 att $z = 1 + \ln x \leq x$. Men därav följer att $x \leq y \leq z \leq x$, vilket är möjligt om och endast om vi har likhet överallt.

   Således måste varje lösning (x, y, z) till ekvationssystemet uppfylla $x = y = z$, vilket gav den entydiga lösningen $x = y = z = 1$.

   SVAR: Enda lösning är $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

6. Vi betecknar cirklarna med resp C_1 och C_2. Låt oss fixera C_1 och rotera C_2 kring den gemensamma medelpunkten. Det finns då $2n$ olika lägen för cirkeln C_2 sådana att varje hörn på C_2 sammanfaller med ett hörn på C_1.

   Vi numrerar de $2n$ hörnen på C_1 i tur och ordning från 1 till $2n$. Betrakta position 1 på C_1. När cirkel C_2 genomlöper de $2n$ lägena kommer vi att få matchande par i hälften av fallen, eftersom det finns n gula och n blå hörn. Detsamma gäller förstås var och en av övriga positioner. Räknat över samtliga $2n$ lägen och $2n$ positioner får vi en summa med 2n termer (lika med antalet positioner), där varje term är lika med n (lika med antalet matchande par för varje position), vilket ger totalsumman $2n^2$.

   Detta betyder att det genomsnittliga antalet matchande par per läge är $2n^2/2n = n$. Men då måste det finnas ett läge som ger åtminstone n matchande par. I annat fall, dvs om varje läge skulle innehålla färre än n matchande par, skulle totala antalet matchande par vara färre än $2n \cdot n = 2n^2$, vilket innebure en motsägelse.

   Alltså finns det alltid ett läge med minst n matchande par.