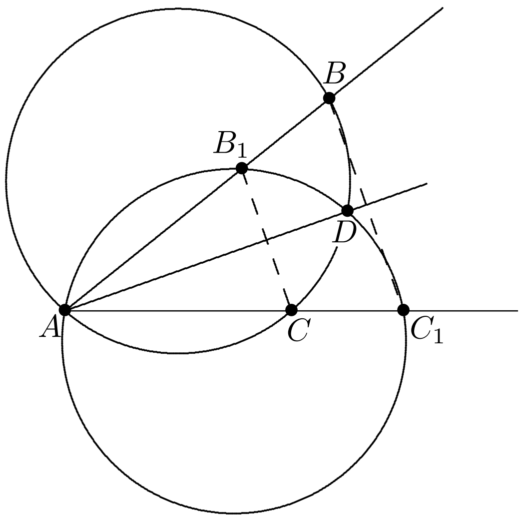
NMC 2006

Förslag till lösningar

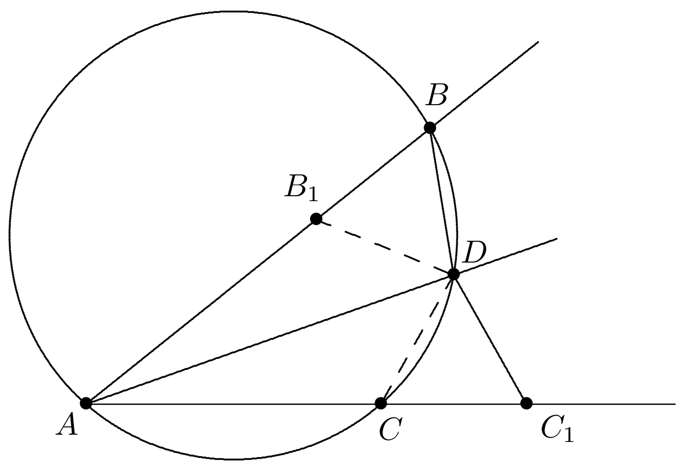
1. Låt B och B_1 vara punkter på en av strålarna som utgår från A och låt C och C_1 vara punkter på den andra strålen från A (som problemet är formulerat förutsätter vi att punkterna B och C är skilda från A och vi antar att detsamma gäller B_1 och C_1). Låt oss utan inskränkning anta att B och C ligger på skilda avstånd från A. Vi ska visa att för givna positioner för B och C gäller att de omskrivna cirklarna till trianglarna ABC och AB_1C_1 passerar genom samma punkt D, oavsett hur B_1 och C_1 är valda på strålarna om villkoret $|AB| + |AC| = |AB_1| + |AC_1|$ är uppfyllt.

För att bestämma läget för D ska vi välja B_1 och C_1 på ett speciellt sätt. Låt B_1 vara bilden av C och C_1 vara bilden av B vid spegling i bisektrisen till $\angle BAC$. Den omskrivna cirkeln till triangeln AB_1C_1 är då bilden av den omskrivna cirkeln till triangeln ABC, varför D måste vara skärningen ($\neq A$) mellan den omskrivna cirkeln till triangeln ABC och bisektrisen till $\angle BAC$.



Låt oss nu göra ett nytt val av B_1 och C_1. Vi kan anta att B_1 ligger på linjesegmentet AB. Då kommer, enligt förutsättningarna, C att ligga på linjesegmentet AC_1. Av villkoret $|AB|+|AC| = |AB_1|+|AC_1|$ följer att $|BB_1| = |CC_1|$. Eftersom $ABDC$ är en fyrhörning inskriven i en cirkel medan AD är bisektris till $\angle BAC$, gäller att $|BD| = |CD|$ och $\angle C_1CD = B_1BD$. Det sista resultatet följer av omvändningen till randvinkelsatsen: vinklarna BAD och CAD, som ju är lika stora, måste stå på bågar av samma längd. Följaktligen är trianglarna B_1BD och C_1CD kongruenta, varav $\angle DB_1B = \angle DC_1C$. Det betyder i sin tur att $\angle B_1DC_1 = \angle B_1DC_1$, som medför att vinklarna vid A och D är komplementvinklar även i fyrhörningen AB_1DC_1. Detta är ett tillräckligt och nödvändigt villkor för att fyrhörningen kan kan inskrivas i en cirkel, vilken måsste vara den som omskriver triangeln AB_1C_1. Punkten D

ligger alltså på denna cirkel. Under givna avståndsvillkor är således läget av punkten D oberoende av hur B_1 och C_1 väljs.



2. Från ekvationen $x + \frac{1}{y} = k$ får vi $\frac{1}{x} = \frac{y}{ky-1}$. Vidare leder $y + \frac{1}{z} = k$ till att $z = \frac{1}{k-y}$. Om vi sätter in dessa uttryck i ekvationen $z + \frac{1}{x} = k$, får vi

$$\frac{1}{k-y} + \frac{y}{ky-1} = k,$$

som successivt kan omskrivas och förenklas till

$$\begin{aligned}
ky - 1 + y(k-y) &= k(k-y)(ky-1),\\
k^3y - k^2 - k^2y^2 + 1 - ky + y^2 &= 0,\\
ky(k^2-1) - (k^2-1) - y^2(k^2-1) &= 0,\\
(k^2-1)(ky-1-y^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Det återstår alltså att undersöka när ekvationerna $k^2 = 1$ och $(ky-1-y^2) = 0$ är uppfyllda. Av den senare följer att $k = y+\frac{1}{y}$, vilket av de givna sambanden leder till att $x = y = z$, vilket strider mot förutsättningen. Enda möjligheten är således att $k^2 = 1$, dvs att $k = \pm 1$.

Dessa k-värden kan verkligen antas. T ex visar $x = 2$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$ att $k = 1$ är möjligt, medan $x = -2$, $y = 1$, $z = -\frac{1}{2}$ visar att $k = -1$ är möjligt. De möjliga k-värdena är således ± 1.

3. Om a_n är ett jämnt kvadrattal, är $a_n \equiv 0 \mod 4$ och om a_n är ett udda kvadrattal, är $a_n \equiv 1 \mod 4$, dvs a_n ger resterna 0 och 1 respektive vid division med 4.

Om $a_k \equiv 0 \mod 4$, är $a_k^5 \equiv 0 \mod 4$ och $a_{k+1} \equiv 3 \mod 4$, eftersom $487 \equiv 3 \mod 4$.

Om $a_k \equiv 3 \mod 4$, är $a_k^5 \equiv 3 \mod 4$ (a_k har då formen $4r + 3$, r heltal; $(4r + 3)^5$ ger resten 3 vid division med 4) och $a_{k+1} \equiv 2 \mod 4$, dvs a_{k+1} kan inte vara ett kvadrattal.

Om $a_k \equiv 2 \bmod 4$, är $a_k^5 \equiv 0 \bmod 4$ och $a_{k+1} \equiv 3 \bmod 4$. Inte heller här kan a_{k+1} vara ett kvadrattal.

Härav följer att om $a_k \equiv 0$ för något k, kan a_n inte vara ett kvadrattal för $n > k$.

Om slutligen $a_k \equiv 1 \bmod 4$, är $a_k^5 \equiv 1 \bmod 4$ och $a_{k+1} \equiv 0 \bmod 4$, vilket innebär att a_{k+1} skulle kunna vara ett kvadrattal.

Sammanfattningsvis konstaterar vi att följden inte kan innehålla några kvadrattal om $a_0 \equiv 2$ eller $a_0 \equiv 3 \bmod 4$. Om a_0 är ett jämnt kvadrattal kan följden inte innehålla ytterligare kvadrattal.

Om a_0 är ett udda kvadrattal skulle eventuellt a_1 kunna vara ett jämnt kvadrattal, medan följden i övrigt skulle sakna kvadrattal. En följd kan alltså inte innehålla fler än 2 kvadrattal.

Antag att $a_0 = m$ och a_1 båda är kvadrattal. Här måste m vara ett udda tal lika med r^2, säg, och $a_1 = r^{10} + 487$ ett jämnt tal, lika med t^2, säg. Eftersom $a_1 > r^{10}$, kan vi utan inskränkning låta $t = r^5 + s$, där $s > 0$. Detta ger $t^2 = r^{10} + 2r^5 s + s^2$, varav följer att

$$2r^5 s + s^2 = 487 \tag{1}$$

För $r = 1$ får vi $s(2 + s) = 487$, som saknar heltalslösning i s, eftersom 487 är ett primtal. För $r = 3$, dvs för $m = 9$, får vi $486s + s^2 = 487$, med den entydiga lösningen $s = 1$, vilket ger $t = 3^5 + 1 = 244$. För $r \geq 5$ och $s > 0$ är vänsterledet i (1) större än 487, varför ekvationen saknar lösningar.

Det maximala antalet kvadrattal som följden kan innehålla är således 2, vilket inträffar om och endast om $a_0 = m = 9$, vilket i sin tur ger $a_1 = 244^2$.

4. Låt R_i och K_i vara antalet färger som används för att måla rutorna i rad i och kolumn i respektive, $i = 1, \ldots, 100$. Vi ska visa att åtminstone ett av talen $R_1, \ldots, R_{100}, K_1, \ldots, K_{100}$ är större än eller lika med 10.

Betrakta summan $\sum_{i=1}^{100} R_i + \sum_{i=1}^{100} K_i$. Vi observerar att denna summa är lika med $\sum_{i=1}^{100} r_i + \sum_{i=1}^{100} k_i$, där r_i = antalet rader som innehåller färg i och k_i = antalet kolumner som innehåller färg i.

Enligt A-G-olikheten är $r_i + k_i \geq 2\sqrt{r_i k_i}$. Eftersom färgen i förekommer i k_i kolumner sett över alla rader, kan färgen i i en given rad förekomma högst k_i gånger. Då färgen i förekommer i r_i rader, kan denna färg förekomma i högst $r_i k_i$ rutor. Men då färgen i förekommer i exakt 100 rutor, måste det gälla att $r_i k_i \geq 100$.

Följaktligen är

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} R_i + \sum_{i=1}^{100} K_i = \sum_{i=1}^{100} r_i + \sum_{i=1}^{100} k_i &= \sum_{i=1}^{100} (r_i + k_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{100} 2\sqrt{r_i k_i} \geq \sum_{i=1}^{100} 2\sqrt{100} = 2000.\end{aligned}$$

Således måste minst ett av talen $R_1, \ldots, R_{100}, K_1, \ldots, K_{100}$ vara ≥ 10.