Problem 1. Låt n vara ett positivt heltal och låt $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) vara olika heltal från mängden $\{1, \ldots, n\}$, sådana att n delar $a_i(a_{i+1} - 1)$ för $i = 1, \ldots, k-1$.

Visa att n inte delar $a_k(a_1 - 1)$.

Problem 2. Låt O vara medelpunkt för den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln. Punkterna P och Q är inre punkter för sidorna CA och AB, respektive. Låt K, L och M vara mittpunkterna på sträckorna BP, CQ och PQ, respektive, samt låt Γ vara cirkeln som går genom K, L och M. Antag att linjen PQ tangerar cirkeln Γ.

Visa att $|OP| = |OQ|$.

Problem 3. Antag att $s_1, s_2, s_3, \ldots$ är en strikt växande följd av positiva heltal. Antag vidare att delföljderna

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{och} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

utgör två aritmetiska talföljder.

Visa att följden $s_1, s_2, s_3, \ldots$ också är en aritmetisk talföljd.

Problem 4. Låt ABC vara en triangel med $|AB| = |AC|$. Bisektriserna till $\angle CAB$ och $\angle ABC$ skär sidorna BC och CA i punkterna D och E, respektive. Låt K vara medelpunkt för den i triangeln ADC inskrivna cirkeln. Antag att $\angle BEK = 45^\circ$.

Bestäm alla möjliga värden för $\angle CAB$.

Problem 5. Bestäm alla funktioner f från mängden av alla positiva heltal till mängden av alla positiva heltal och sådana att det, för alla positiva heltal a och b, finns en icke-degenererad triangel med sidor vars längder är

$$a, \ f(b) \ \text{ och } \ f(b + f(a) - 1).$$

(En triangel är *icke-degenererad* om dess hörn inte ligger i linje.)

Problem 6. Låt n vara ett positivt heltal och låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara n olika positiva heltal. Låt vidare M vara en mängd av $n-1$ positiva heltal som inte innehåller talet $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En gräshoppa hoppar längs den reella tallinjen. Den startar i punkten 0 och gör n hopp till höger. Längderna av gräshoppans hopp är $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i någon ordning.

Visa att ordningen kan väljas så att gräshoppan aldrig landar på någon punkt från M.