

Problem 1. Låt n vara ett positivt heltal och låt a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) vara olika heltal från mängden $\{1, \dots, n\}$, sådana att n delar $a_i(a_{i+1} - 1)$ för $i = 1, \dots, k - 1$.

Visa att n inte delar $a_k(a_1 - 1)$.

Problem 2. Låt O vara medelpunkt för den kring triangeln ABC omskrivna cirkeln. Punkterna P och Q är inre punkter för sidorna CA och AB , respektive. Låt K , L och M vara mittpunkterna på sträckorna BP , CQ och PQ , respektive, samt låt Γ vara cirkeln som går genom K , L och M . Antag att linjen PQ tangerar cirkeln Γ .

Visa att $|OP| = |OQ|$.

Problem 3. Antag att s_1, s_2, s_3, \dots är en strikt växande följd av positiva heltal. Antag vidare att delföjderna

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{och} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

utgör två aritmetiska talföljder.

Visa att följden s_1, s_2, s_3, \dots också är en aritmetisk talföljd.

Problem 4. Låt ABC vara en triangel med $|AB| = |AC|$. Bisektriserna till $\angle CAB$ och $\angle ABC$ skär sidorna BC och CA i punkterna D och E , respektive. Låt K vara medelpunkt för den i triangeln ADC inskrivna cirkeln. Antag att $\angle BEK = 45^\circ$.

Bestäm alla möjliga värden för $\angle CAB$.

Problem 5. Bestäm alla funktioner f från mängden av alla positiva heltal till mängden av alla positiva heltal och sådana att det, för alla positiva heltal a och b , finns en icke-degenererad triangel med sidor vars längder är

$$a, f(b) \text{ och } f(b + f(a) - 1).$$

(En triangel är *icke-degenererad* om dess hörn inte ligger i linje.)

Problem 6. Låt n vara ett positivt heltal och låt a_1, a_2, \dots, a_n vara n olika positiva heltal. Låt vidare M vara en mängd av $n - 1$ positiva heltal som inte innehåller talet $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. En gräshoppa hoppar längs den reella tallinjen. Den startar i punkten 0 och gör n hopp till höger. Längderna av gräshoppans hopp är a_1, a_2, \dots, a_n i någon ordning.

Visa att ordningen kan väljas så att gräshoppan aldrig landar på någon punkt från M .