

Finaltävling i Uppsala den 24 november 2001

1. Man väljer sex tal ur tabellen

4	6	10	14	22	26
6	9	15	21	33	39
10	15	25	35	55	65
16	24	40	56	88	104
18	27	45	63	99	117
20	30	50	70	110	130

på sådant sätt att ur varje rad och ur varje kolumn väljs exakt ett tal. Visa att produkten av alla sex talen är oberoende av valet.

2. Visa att talet $\sqrt[3]{\sqrt{52} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{52} - 5}$ är rationellt.
3. I triangeln $\triangle ABC$ står vinkeln A mot sidan a , vinkeln B mot sidan b och vinkeln C mot sidan c . Visa att $\cos(A - C) + 4\cos B = 3$ om det är känt att $b = (a + c)/2$.
4. En cirkel genom hörnet A i en triangel ABC tangerar sidan BC i punkten D . Cirkeln skär vidare sidan AB i punkten E och sidan AC i punkten F . Hur stor är $\angle ABC$ om det är känt att $\angle ADC = 80^\circ$, samt att sträckan EF är bisektris till $\angle AFD$?
5. Bestäm alla polynom sådana att

$$(P'(x))^2 = cP(x)P''(x)$$

för någon konstant c .

6. Ett schackbräde är täckt med 32 dominobrickor (varje bricka täcker två intilliggande rutor på brädet). De brickor som ligger horisontellt delas in i två klasser: SV (vänster halva täcker en svart ruta) och VS (vänster halva täcker en vit ruta). Visa att hur man än täcker schackbrädet, så kommer antalet brickor i SV att vara lika med antalet brickor i VS.

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!