SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling den 20 november 1999

1. Lös ekvationen

$$|||||x^2 - x - 1| - 2| - 3| - 4| - 5| = x^2 + x - 30.$$

2. Två cirklar med medelpunkterna O_1 och O_2 tangerar varandra utvändigt. Man drar en linje som tangerar cirklarna i punkterna A och B . Visa att om sträckan AB delas på mitten av punkten P så är vinkeln O_1PO_2 rät.

3. Lös ekvationen

$$5^x + 6^y + 7^z + 11^u = 1999$$

i icke-negativa heltal x, y, z, u.

4. En liksidig triangel har hörn på tre av sidorna i en kvadrat med sidan 1. Vad kan sägas om sidlängden i triangeln?

5. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara icke-negativa reella tal med summan s. Bevisa att

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n \leq \frac{s^2}{4}.$$

6. På en skrivtavla finns $n \geq 3$ positiva heltal. Man väljer två tal, a och b, sådana att inget av dem delar det andra (vi antar att talen är sådana att detta är möjligt). Sedan ersätter man a med största gemensamma delaren till a och b, medan man ersätter b med minsta gemensamma multipeln till a och b. Visa att

   1) man efter en ändlig följd av operationer har ett läge där inga valmöjligheter finns, dvs för varje par av tal är det ena talet en delare till det andra,

   2) de tal som till slut finns kvar på tavlan är oberoende av i vilken ordning talparen har valts.

   Exempel: Antag att de ursprungliga talen är 4, 6 och 9. Man väljer talen 4 och 6. Deras största gemensamma delare är 2, medan deras minsta multipel är 12. Sedan väljer man 9 och 12 som ersätts med 3 och 36. Man har nu talen 2, 3 och 36 varefter man får slutsteget $(1, 6, 36)$. Följden blir alltså

$$(4, 6, 9) \to (2, 12, 9) \to (2, 3, 36) \to (1, 6, 36).$$

   Med samma tre utgångstal skulle man också kunna få följden

$$(4, 6, 9) \to (4, 3, 18) \to (1, 12, 18) \to (1, 6, 36).$$

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!