

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING  
Svenska Matematikersamfundet

*Lösningar till kvalificeringstävlingen den 4 oktober 2000*

- 1 LÖSNING 1. Först noterar vi att både  $x$  och  $y$  måste vara positiva tal, annars kan inte summorna i vänsterleden vara positiva samtidigt. Multiplikation av vänsterleden ger

$$(x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1,$$

vilket ska vara lika med produkten av högerleden, dvs 4, och vi får

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \left( \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 = 0.$$

Det betyder att uttrycket inom parentes måste vara lika med 0 och därmed att  $x = y$ . Endera av ekvationerna ger nu att  $x = y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

LÖSNING 2. Ekvation 1 ger  $y = \sqrt{2} - x$  som efter insättning i ekvation 2 ger

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2} - x} = 2\sqrt{2},$$

som också kan skrivas

$$\frac{\sqrt{2}}{x(\sqrt{2} - x)} = 2\sqrt{2},$$

varav

$$x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

eller

$$\left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0.$$

Enda lösningen är  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , som insatt i ekvation 1 (eller ekvation 2) ger  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

SVAR: Entydig lösning är  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2. Eftersom den andra produkten är delbar med 5, måste något av talen  $a + 1$ ,  $b + 1$  och  $c + 1$  vara delbart med 5. Detta betyder i sin tur att något av talen  $a$ ,  $b$  och  $c$  slutar på 4 eller 9. Eftersom  $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ , finner vi snart att enda möjliga faktoriseringar  $a \cdot b \cdot c$ , där någon faktor slutar på 4 eller 9, är  $1 \cdot 1 \cdot 84$ ,  $1 \cdot 4 \cdot 21$ ,  $3 \cdot 4 \cdot 7$ ,  $2 \cdot 3 \cdot 14$  och  $1 \cdot 6 \cdot 14$ . Av dessa är det bara det näst sista fallet som uppfyller förutsättningarna:  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3 \cdot 4 \cdot 15 = 180$ .

Svar: Enda lösningen är  $(a, b, c) = (2, 3, 14)$ .

3. Vi kan låta tiderna som krävs för  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  att köra sträckan vara resp  $T$ ,  $T + t$ ,  $T + 2t$ ,  $T + 3t$ . Enligt förutsättningarna är  $T + 3t = 2T$ , varav  $T = 3t$ . Tiderna kan alltså skrivas resp  $3t$ ,  $4t$ ,  $5t$ ,  $6t$ . Eftersom förhållandet mellan  $B : s$  och  $C : s$  tider är 4 till 5, måste förhållandet mellan hastigheterna vara det omvända, 5 till 4. Hastigheten för  $C$  är alltså 80% av hastigheten för  $B$ , dvs  $C$  kör 20% långsammare än  $B$ .

Svar:  $C$  kör 20% långsammare än  $B$ .

4. Täljaren i vänsterledet kan skrivas på formen

$$a^2\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)\left(a + \frac{1}{a}\right),$$

dvs olikheten är ekvivalent med att  $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq 3$ . Men denna olikhet är i sin tur ekvivalent med olikheten

$$a^4 + 1 \geq 2a^2,$$

eller

$$(a^2 - 1)^2 \geq 0,$$

som uppenbarligen gäller. Likhet har vi om och endast om  $a = 1$ .

5. I parallelogrammen  $ABCD$  skär diagonalerna varandra i punkten  $P$  som figuren visar. Låt diagonalerna ha längderna  $2a$  resp  $2b$  (diagonalerna delar varandra mitt itu) samt låt den större sidan ha längden  $c$  och den mindre längden  $d$ . Vi söker alltså kvoten  $a/b$  när kvoten  $c/d$  är så stor som möjligt. Cosinussatsen tillämpad i på resp trianglar  $APB$  och  $BPC$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 135^\circ \\ d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 45^\circ \end{aligned}$$

eller

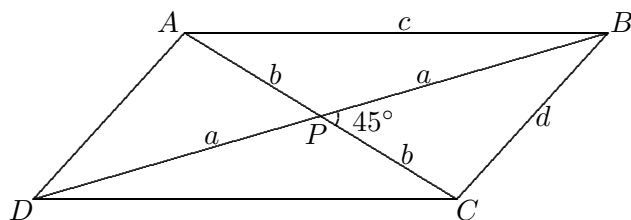
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab \\ d^2 &= a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \end{aligned}$$

Då  $c/d$  är maximal samtidigt som  $c^2/d^2$  är maximal, gäller det att bestämma värdet på  $x = a/b$  när  $c^2/d^2$  antar sitt största värde. Den senare kvoten kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab}{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} &= \frac{(a^2 + b^2)(1 + \sqrt{2}ab/(a^2 + b^2))}{(a^2 + b^2)(1 - \sqrt{2}ab/(a^2 + b^2))} \\ (1) \qquad \qquad \qquad &= \frac{1 + \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)}}{1 - \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)}}, \end{aligned}$$

där  $p = a^2/(a^2 + b^2)$  uppfyller  $0 < p < 1$ . Funktionen  $p(1-p)$  antar sitt maximum  $1/4$  för  $p = 1/2$ . Med  $p = 1/2 + c$  blir nämligen  $p(1-p) = (1/2+c)(1/2-c) = 1/4 - c^2 \leq 1/4$ , med likhet om och endast om  $c = 0$ .

Betrakta kvoten i (1). Den antar uppenbarligen sitt största värde när täljaren är som störst och nämnaren som minst, vilket inträffar när  $p = 1/2$ , dvs när  $a = b = 1$ , vilket innebär att  $ABCD$  bildar en rektangel. Observera att nämnaren i (1) alltid är positiv eftersom  $1 - \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)} \geq 1 - \sqrt{2}/2 > 0$ . Kvotens maximivärde är  $(2 + \sqrt{2})/(2 - \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,828$ .



SVAR: Kvoten mellan diagonalernas längder antar värdet 1 när kvoten mellan sidornas längder är maximal. Parallelogrammen är då en rektangel.

6. Det räcker att visa likheten för positiva heltal  $n$ . För  $n = 0$  är likheten uppenbarligen sann och för negativa heltal  $n$  får vi samma likhet om  $n$  byts mot  $-n$ .

Låt oss för varje positivt heltal  $n$  dela upp mängden  $M$  i delmängder, där varje delmängd antingen består av tal som bildar en ändlig aritmetisk talföljd på formen  $k, k + n, k + 2n, \dots, k + (r - 1)n$  eller där varje delmängd bildar en oändlig aritmetisk talföljd på formen  $k, k + n, k + 2n, \dots$

För alla tal  $m$  i den ändliga mängden är antalet  $m$  för vilka  $m + n$  inte tillhör mängden detsamma som antalet tal  $m - n$  som inte tillhör mängden, dvs sådana delmängder skulle kunna plockas bort ur  $M$  utan att värdet på  $f(-n) - f(n)$  förändras.

Däremot för de oändliga delmängderna gäller det att för varje tal  $m$  i delmängden är också talet  $m + n$  ett tal i delmängden, medan det för alla tal av typ  $m - n$ , med ett undantag, tillhör delmängden. För det minsta talet i delmängden,  $m_0$  säg, kan inte  $m_0 - n$  tillhöra delmängden. Följaktligen gäller det för varje sådan delmängd att värdet på  $f(-n) - f(n)$  är lika med 1.

Eftersom talen i varje delmängd uppträder periodiskt med perioden  $n$  kan det på sin höjd finnas  $n$  olika delmängder. Det måste dock finnas minst  $n$  delmängder. Talen  $2001, 2002, \dots, 2000 + n$  förekommer nämligen i exakt var sin delmängd. Det finns alltså exakt  $n$  oändliga delmängder, varför det sammantaget måste gälla att  $f(-n) - f(n) = n$ .