SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 19 november 2005

1. Bestäm alla heltalslösningar x och y till ekvationen $(x + y^2)(x^2 + y) = (x + y)^3$.

2. Vid en kassa står 12 personer i kö. Pga ett tekniskt fel måste kassan stängas och de köande flyttar över till en nyöppnad kassa. På hur många olika sätt kan dessa 12 personer bilda en ny kö på ett sådant sätt att varje person har samma position eller har tagit ett steg fram eller ett steg tillbaka jämfört med ursprungskön?

3. I triangeln ABC dras bisektriserna från hörnen A och C. Bisektrisen från A skär sidan BC i punkten D, medan bisektrisen från C skär sidan AB i punkten E. Man vet att vinkeln vid B är större än $60°$.
Visa att $|AE| + |CD| < |AC|$.

4. Nollställena till fjärdegradspolynomet $f(x)$ är reella och bildar en aritmetisk följd. (De kan alltså skrivas a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ för något a, något d.) Visa att de tre nollställena till polynomet $f'(x)$ också bildar en aritmetisk följd.

5. Varje ruta i ett rutnät med 2005×2005 rutor målas antingen vit eller svart. Detta görs så att varje delkvadrat med 2×2 rutor innehåller ett udda antal svarta rutor. Visa att av de 4 hörnrutorna är ett jämnt antal svarta. Hur många möjligheter finns det att måla rutnätet på detta sätt?

6. En tetraeder vars kanter alla har längden 1 projiceras vinkelrätt mot ett plan. Bestäm den största respektive minsta möjliga arean av bilden.

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!