SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 22 november 2003

1. Talen x, y, z och w är alla ≥ 0. Bestäm det minsta värdet på x sådant att sambanden

$$\begin{cases} y &= x - 2003 \\ z &= 2y - 2003 \\ w &= 3z - 2003 \end{cases}$$

   är uppfyllda. Vad blir då talen y, z och w?

2. I en föreläsningssal är stolar placerade i rader och kolumner, så att de bildar en rektangel. I varje rad sitter 6 pojkar och i varje kolumn sitter 8 flickor, medan totalt 15 platser är lediga. Vad kan sägas om antalet rader och antalet kolumner?

3. Vilka reella tal x uppfyller ekvationen

$$[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2 \text{ ?}$$

   Här betecknar $[a]$ heltalsdelen av talet a, dvs det största heltal som är $\leq a$.

4. Bestäm alla polynom P med reella koefficienter sådana att

$$1 + P(x) = \frac{1}{2}\big(P(x-1) + P(x+1)\big)$$

   för alla reella x.

5. Givet två positiva, reella tal a, b, hur många (icke-kongruenta) plana fyrhörningar $ABCD$ finns det sådana att $|AB| = a$, $|BC| = |CD| = |DA| = b$ och $\angle B = 90°$?

6. Betrakta ett oändligt rutnät uppbyggt av identiska kvadrater, där man i varje ruta har skrivit ett heltal. Antag att det för varje ruta gäller att heltalet i denna ruta är lika med summan av det tal som står närmast ovanför och det tal som står närmast till vänster. Antag att det finns en rad R_0 i rutnätet i vilken *alla tal är positiva.* Låt R_1 vara raden under R_0, låt R_2 vara raden under R_1 osv. Visa att det för varje $N \geq 1$ gäller att raden R_N inte kan innehålla fler än N stycken nollor.

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare eller andra elektroniska hjälpmedel är *inte* tillåtna!