

**SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING**  
**Svenska Matematikersamfundet**

**Kvalificeringstävling den 5 oktober 2004**

1. Städerna  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  och  $E$  i ett land binds samman av raka vägar (ev kan mer än två städer ligga längs samma väg). Avståndet mellan  $A$  och  $B$  och mellan  $C$  och  $D$  är 3 mil, mellan  $B$  och  $D$  1 mil, mellan  $A$  och  $C$  5 mil, mellan  $D$  och  $E$  4 mil samt mellan  $A$  och  $E$  8 mil. Beräkna avståndet mellan  $C$  och  $E$ .
2. Linda skriver fyra positiva heltal,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , på ett papper. Hon roar sig med att lägga ihop talen två och två:  $a + b$ ,  $a + c$ ,  $\dots$ ,  $c + d$ , men glömmer en av de möjliga summorna. De fem summor hon får blir 7, 11, 12, 18 och 23. Vilken summa var det som Linda glömde? Vilka är de fyra heltalen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ?
3. Bestäm det största och det minsta värdet av  $\frac{mn}{(m+n)^2}$  om  $m$  och  $n$  är positiva heltal, inte större än 2004.
4. Låt  $k$  och  $n$  vara naturliga tal,  $1 < k < n$ . Givet är  $n$  tal sådana att medelvärdet av  $k$  av dem, vilka som helst, är ett heltal. Visa att alla  $n$  talen är heltal.
5. En spikmatta har bildats genom att man i varje punkt med heltalskoordinater i planet satt en vertikal spik med höjden  $h$  (och försumbar bredd). En sfärisk ballong med radien  $R$  släpps ner. Ballongen spricker genast om dess yta kommer i kontakt med en spik. Hur stor kan radien  $R$  vara för att ballongen ska en chans att överleva experimentet?
6. Antag att  $2n$  (där  $n \geq 1$ ) punkter ligger i planet på ett sådant sätt att ingen rät linje innehåller mer än två av dem. Antag vidare att  $n$  av dessa punkter målas blå och övriga  $n$  målas gula. Visa att man kan bilda  $n$  sträckor, varje sträcka med en blå och en gul ändpunkt, så att var och en av de  $2n$  punkterna är ändpunkt till en sträcka och ingen sträcka skär någon annan.

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress

[www.math.uu.se/~dag/skolornas.html](http://www.math.uu.se/~dag/skolornas.html)