SKOLORNAS MATEMATIKTVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 25 november 2000

1. Talen $1, 2, \ldots, 10$ är skrivna i en rad på ett papper. Varje tal är skrivet antingen med röd eller med blå färg. Minst ett tal är skrivet med blå färg. Följande samband råder mellan talen:
   Om talen r och s i talföljden är skrivna med olika färger är summan $r + s$ skriven med blå färg och produkten $r \cdot s$ med röd färg. Detta är förstås bara av intresse för summor och produkter som tillhör talföljden. Man vet att talet 5 är skrivet med röd färg. Ange färgen för vart och ett av de övriga nio talen.

2. Låt P vara ett polynom, sådant att $P(x^2 + 1) = 6x^4 - x^2 + 5$. Bestäm $P(x^2 - 1)$.

3. Finns det heltal n och m så att
$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = m^2\,?$$

4. En triangel i rummet har sina hörn i punkter med heltalskoordinater.
   Visa att triangelarean är $\geq \frac{1}{2}$.

5. För varje naturligt tal n definierar man dess derivata n' enligt följande regler:
   1) om n är ett primtal är derivatan lika med 1;
   2) om n är ett tal på formen $a \cdot b$, där a och b är godtyckliga naturliga tal, är derivatan $(ab)'$ lika med $a'b + ab'$.

   Exempelvis gäller att $6' = (2 \cdot 3)' = 2' \cdot 3 + 2 \cdot 3' = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$.
   Bestäm alla tal som är lika med sin derivata.
   Visa att derivatan är väldefinierad, dvs att n' inte beror av faktoriseringen av n.

6. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} y(x + y)^2 & = & 9 \\ y(x^3 - y^3) & = & 7. \end{cases}$$

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!