SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 22 november 2003

1. Via det första sambandet kan vi uttrycka x som en funktion av y, via det andra y som en funktion av z och via det tredje z som en funktion av w. Genom upprepad insättning ska vi sedan uttrycka x som en funktion av w och därvid utnyttja att $w \geq 0$. För att underlätta insättningen visar det sig lämpligt att multiplicera det första sambandet med 6 och det andra med 3, vilket ger

$$\begin{cases} 6x &= 6y + 6 \cdot 2\,003 \\ 6y &= 3z + 3 \cdot 2\,003 \\ 3z &= \ w + 2\,003. \end{cases}$$

Successiv insättning ger följande kedja av samband:

$$\begin{aligned} 6x &= 6y + 6 \cdot 2\,003 = (3z + 3 \cdot 2\,003) + 6 \cdot 2\,003 = 3z + 9 \cdot 2\,003 \\ &= (w + 2\,003) + 9 \cdot 2\,003 = w + 10 \cdot 2\,003. \end{aligned}$$

Eftersom $w \geq 0$ är $6x \geq 10 \cdot 2\,003$, dvs $x \geq \frac{5}{3} \cdot 2\,003$, med likhet om och endast om $w = 0$. För att $x = \frac{5}{3} \cdot 2\,003$ ska vara ett giltigt minimivärde krävs att motsvarande värden på y och z också är ≥ 0. Men enligt det tredje sambandet är $z = \frac{1}{3} \cdot 2\,003$, vilket insatt i det andra sambandet ger $6y = 2\,003 + 3 \cdot 2\,003 = 4 \cdot 2\,003$ eller $y = \frac{2}{3} \cdot 2\,003$. Vi konstaterar att för $w = 0$ är x, y och z alla positiva och det funna x-värdet är det sökta minimivärdet.

Svar: Minsta värde på x är $\frac{10\,015}{3}$, för vilket $y = \frac{4\,006}{3}$, $z = \frac{2\,003}{3}$ och $w = 0$.

2. Låt antalet rader vara m och antalet kolumner vara n. Antalet pojkar är då $6m$ och antalet flickor $8n$. Det finns totalt mn platser av vilka 15 står tomma. Vi får alltså ekvationen

$$mn = 6m + 8n + 15,$$

vilken också kan skrivas

$$(m - 8)(n - 6) = 6 \cdot 8 + 15 = 63.$$

Lösningarna till denna ekvation får vi genom att dela upp talet 63 i två faktorer. Enligt förutsättningarna är det minst 8 rader och minst 6 kolumner och eftersom produkten är positiv måste de båda faktorerna vara positiva, dvs $m \geq 9$ och $n \geq 7$. Vi finner att

$$63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 9 \cdot 7 = 21 \cdot 3 = 63 \cdot 1,$$

vilket ger följande sex lösningar för (m, n):

$$(9, 69),\ (11, 27),\ (15, 15),\ (17, 13),\ (29, 9),\ (71, 7).$$

För fullständighets skull bör vi även visa att dessa lösningar är praktiskt genomfrbara. Kontroll visar att alla sex fallen r mjliga.

Svar: Det finns sex olika lösningar:

Antal rader	9	11	15	17	29	71
Antal kolumner	69	27	15	13	9	7

3. Om ekvationen skrivs som

$$[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$$

ligger det nära till hands att addera 1 till vardera ledet och komplettera till kvadrater och vi får

$$[x^2 - 2x + 1] = [x]^2 - 2[x] + 1,$$

där vi i vänsterledet har utnyttjat att $[a] + 1 = [a + 1]$ för varje reellt tal a. Detta leder till ekvationen

$$[(x-1)^2] = ([x] - 1)^2 \text{ eller } [(x-1)^2] = [x-1]^2,$$

som med $y = x - 1$ kan skrivas

$$[y^2] = [y]^2.$$

Vi ser att varje heltal y r en lsning till ekvationen, eftersom vardera ledet d r lika med y^2. Fr y skilt frn heltal särskiljer vi två fall: $y < 0$ och $y > 0$.

Fall 1. När $y < 0$ (och icke-heltal) följer det av $[y] < y$ att $[y]^2 > y^2$. Men detta innebr att ekvationen inte kan glla eftersom $y^2 \geq [y^2]$ fr alla y.

Fall 2. Nr $y > 0$ (och icke-heltal) utnyttjar vi att

$$[y^2] = [y^2 - [y]^2 + [y]^2] = [y]^2 + [y^2 - [y]^2],$$

dr den sista likheten fljer av att $[y]^2$ r ett heltal.

Fr att ekvationen ska glla mste $[y^2 - [y]^2] = 0$, vilket med $n = [y]$ r uppfyllt om och endast om $n^2 < y^2 < n^2 + 1$.

Eftersom $y > 0$ (och $n \geq 0$) r detta ekvivalent med att $n < y < \sqrt{n^2+1}$ (vi noterar att $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$) eller, uttryckt i x, $n + 1 < x < \sqrt{n^2+1} + 1$, dr $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Svar: Lösningsmängden för x består av samtliga heltal samt av intervallen $(n+1, \sqrt{n^2+1}+1)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Låt oss först undersöka några enkla polynom.

För $P(x) \equiv C$, konstant, är vänsterledet lika med C+1, medan högerledet är C. I detta fall har vi ingen lösning.

Om $P(x)$ är ett förstagradspolynom, dvs om $P(x) = Bx + C$, är vänsterledet lika med $Bx + C + 1$, medan högerledet är $\frac{1}{2}(Bx - B + C + Bx + B + C) = Bx + C$. Inte heller här har vi någon lösning.

Om $P(x)$ är ett andragradspolynom, dvs om $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, är vänsterledet lika med $Ax^2 + Bx + C + 1$, medan högerledet är $\frac{1}{2}\big((Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C) + (Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B + C)\big) = Ax^2 + Bx + A + C$. Identifiering ger $A = 1$, medan B och C kan väljas godtyckligt. Vi har alltså lösningen $P(x) = x^2 + Bx + C$.

För $n \geq 3$ ansätter vi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Vänsterledet i det givna villkoret är då

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 + 1,$$

medan högerledet blir

$$\frac{1}{2}\big(a_n((x-1)^n+(x+1)^n)+a_{n-1}((x-1)^{n-1}+(x+1)^{n-1})$$
$$+a_{n-2}((x-1)^{n-2}+(x+1)^{n-2})+$$
$$\ldots+a_2((x-1)^2+(x+1)^2)+a_1((x-1)+(x+1))+2a_0\big)$$
$$=\frac{1}{2}\big(a_n(x^n-nx^{n-1}+\tbinom{n}{2}x^{n-2}+\ldots+x^n+nx^{n-1}+\tbinom{n}{2}x^{n-2}+\ldots)$$
$$+a_{n-1}(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\ldots+x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\ldots)$$
$$+a_{n-2}(x^{n-2}-(n-2)x^{n-3}+\ldots+x^{n-2}-(n-2)x^{n-3}+\ldots)$$
$$\ldots$$
$$+a_2(x^2-2x+1+x^2+2x+1)+a_1(x-1+x+1)+2a_0\big).$$

Koefficienten för x^n är a_n i båda leden; detsamma gäller koefficienten för x^{n-1} som i vardera ledet är lika med a_{n-1}. Koefficienterna för x^{n-2} skiljer sig däremot: i vänsterledet har vi a_{n-2} och i högerledet $a_n\binom{n}{2}+a_{n-2}$. För att få likhet måste vi ha $a_n=0$ eftersom $\binom{n}{2}\neq 0$ för $n\geq 3$.

För varje ansats av ett polynom av grad $n\geq 3$ får vi alltså $a_n=0$, vilket betyder att det inte finns någon lösning av grad ≥ 3 och det funna andragradspolynomet är därför den enda lösningen.

Svar: $P(x)=x^2+Bx+C$ för godtyckliga reella tal B och C.

5. Konstruera triangeln ABC sådan att vinkeln B är $90°$, $|AB|=a$ och $|BC|=b$. Inför beteckningarna $c=|AC|$ och $k=\frac{a}{b}$. För att det ska finnas en fyrhörning med de önskade egenskaperna måste cirklarna med medelpunkter A, C och radie b skära mittpunktsnormalen till AC i två punkter D_1 och D_2 sådana att $ABCD_1$ eller $ABCD_2$ (eller båda) är en fyrhörning. Detta är uppenbarligen omöjligt om $b\leq\frac{1}{2}c$, dvs om $(2b)^2\leq a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2\leq a^2$, vilket inträffar om $k\geq\sqrt{3}$ (se figur 1).

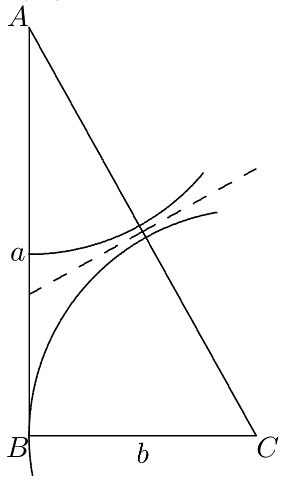

Fig 1. $k\geq\sqrt{3}$

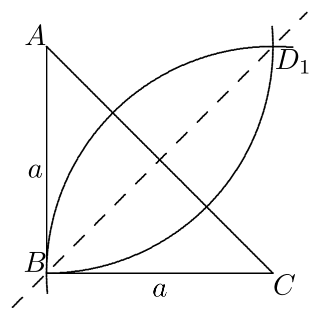

Fig 2. $k=1$

Lt oss betrakta de tre fallen att mittpunktsnormalen till AC
- gr genom B;
- skr BC i en inre punkt;
- skr AB i en inre punkt.

Fall 1. Antag att mittpunktsnormalen till AC går genom B (vilket är ekvivalent med att $a=b$). Cirklarna med medelpunkter A, B och radie b $(=a)$ kommer då att skära normalen i punkterna D_1 och D_2, där D_1 befinner sig utanför triangeln ABC (på andra sidan AC), medan D_2 sammanfaller med hörnet B. Fyrhörningen $ABCD_1$ har de önskade egenskaperna (det är en kvadrat med sidan a). I detta fall är $k = 1$.

Fall 2. Antag att mittpunktsnormalen till AC skär BC i en inre punkt P. Det gller d att $|CP| < b$. I det fallet kommer cirklarna med medelpunkter A, C och radie b att skära mittpunktsnormalen i två punkter D_1, D_2, båda utanför triangeln ABC och sådana att D_1 och B ligger på var sin sida om AC medan A och D_2 ligger på var sin sida om BC. Det återstår att se vilka värden på k som leder till detta fall. Vi har

$$b = |BC| > |CP| = |AP| > |AB| = a,$$

vilket betyder att $(0 <)k < 1$. Här har vi bl a utnyttjat att triangeln APC är likbent. Endast punkten D_1 ger en lösning ($ABCD_2$ är ingen fyrhörning eftersom två av "sidorna" skär varandra i inre punkter).

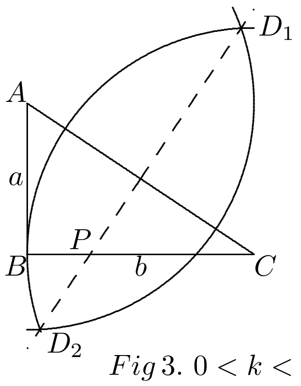

Fig 3. $0 < k < 1$.

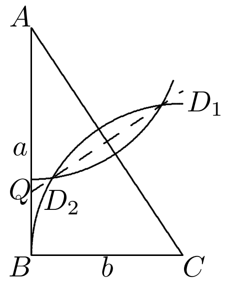

Fig 4. $1 < k < \sqrt{3}$

Fall 3. Antag att mittpunktsnormalen till AC skär AB i en inre punkt Q. Vi har

$$a = |AB| > |AQ| = |QC| > |BC| = b,$$

vilket innebär att $k > 1$. Men vi har tidigare visat att för $k \geq \sqrt{3}$ kommer cirklarna inte att skära mittpunktsnormalen. Vi har alltså $1 < k < \sqrt{3}$.

I detta fall kommer cirklarna med medelpunkter A, C och radie b att skära mittpunktsnormalen i två punkter, den ena (kalla den D_1) ligger utanför triangeln, D_1 och B ligger på var sin sida om AC och den andra (som vi kallar D_2) ligger innanför triangeln (om M betecknar mittpunkten på AC följer detta av att $|AM| < b < |AQ|$). Både $ABCD_1$ och $ABCD_2$ är lösningar ($ABCD_1$ är konvex och $ABCD_2$ är icke-konvex, så de är icke-kongruenta).

SVAR:

$0 < a \leq b$	$(0 < k \leq 1)$	: en fyrhörning med de sökta egenskaperna;
$b < a < b\sqrt{3}$	$(1 < k < \sqrt{3})$	: två fyrhörningar med de sökta egenskaperna;
$a \geq b\sqrt{3}$	$(k \geq \sqrt{3})$	: ingen fyrhörning med de sökta egenskaperna.

6. Betrakta en godtycklig rad i rutnätet och beteckna talen i denna rad

$$\ldots, a(-1),\ a(0),\ a(1),\ a(2), \ldots \text{ ("följden } a\text{").}$$

Beteckna talen i raden ovanför

$$\ldots, b(-1),\ b(0),\ b(1),\ b(2), \ldots \text{ ("följden } b\text{"),}$$

så att

$$a(n) = a(n-1) + b(n) \text{ för alla n.}$$

Låt oss säga att följden a har en teckenväxling vid n om antingen $a(n)a(n+1) < 0$ eller $a(n+1) = 0$.

Vi påstår nu att om $n < m$ och följden a har en teckenväxling vid n och en teckenväxling vid m, så finns det ett index k valt bland talen $n+1, n+2, \ldots, m$ så att följden b har en teckenväxling vid k.
Ty antag motsatsen, dvs att b inte har någon teckenväxling vid något av talen $n+1$, $n+2, \ldots, m$. Det betyder dels att $b(n+1)b(n+2)$, $b(n+2)b(n+3)$, …, $b(m)b(m+1)$ alla är ≥ 0, dels att talen $b(n+2)$, $b(n+3)$, …, $b(m+1)$ är skilda från 0. Vi kan då utan inskränkning anta att $b(n+2) > 0$ och det följer att $b(n+1) \geq 0$ samt att $b(k) > 0$ för alla k med $n+2 \leq k \leq m+1$. Detta leder till att
$a(n) \leq a(n+1) < a(n+2) < \ldots < a(m+1)$. Eftersom a har en teckenväxling vid n och $a(n) \leq a(n+1)$ så följer att $a(n+1) \geq 0$. Alltså har vi $0 \leq a(n+1) < a(n+2) < \ldots < a(m+1)$. Detta motsäger att följden a har en teckenväxling vid m.

En konsekvens av vårt inledande påstående är nu att om följden a har $j \geq 2$ stycken teckenväxlingar, låt oss säga vid index $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$, så har följden b minst $j-1$ stycken teckenväxlingar, nämligen en teckenväxling vid något index k valt bland talen $n_1+1, \ldots, n_2$, en vid något k bland talen $n_2+1, \ldots, n_3$, osv.

Se nu på det ursprungliga problemet. Antag att det finns ett $N \geq 1$ för vilket raden R_N innehåller fler än N nollor. Eftersom varje nolla definitionsmässigt ger upphov till en teckenväxling, så följer då att raden R_N innehåller fler än N teckenväxlingar. Enligt vad vi har visat ovan måste då raden R_{N-1} innehålla fler än $N-1$ teckenväxlingar, raden R_{N-2} innehålla fler än $N-2$ teckenväxlingar, osv. Detta leder till att raden R_0 måste innehålla minst en teckenväxling. Men detta motsäger uppenbarligen förutsättningen att alla tal i R_0 är positiva och vi har därmed visat att R_N inte kan innehålla fler än N nollor.