SKOLORNAS MATEMATIKTVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen i Luleå den 25 november 2000

1. Vi ska först visa att talet 1 måste vara skrivet med blå färg. Antag omvänt att 1 är skrivet med röd färg. Enligt förutsättningarna finns det ett heltal a, $2 \leq a \leq 10$, som är skrivet med blå färg. Men i så fall måste produkten $1 \cdot a = a$ vara skriven med röd färg vilket innebär en motsägelse.

   Vi visar sedan att talen 2 och 3 båda är skrivna med blå färg. Antag först att 2 och 3 är skrivna med olika färg. I så fall måste summan, 5, vara skriven med blå färg: motsägelse. Talen 2 och 3 är alltså skrivna med samma färg. Men denna färg kan inte vara röd, eftersom summan av en blå 1:a och en röd 2:a då skulle ge en blå 3:a. Alltså är 2 och 3 båda blåfärgade.

   Med samma argument kan inte 4 och 5 båda vara rödfärgade. Talet 4 måste alltså vara blåfärgat.

   Eftersom talen 2 och 5 är olikfärgade blir produkten 10 rödfärgad. Däremot är talen 6, 7, 8 och 9 blåfärgade eftersom alla dessa kan skrivas som summor av två olikfärgade tal: $1+5$, $2+5$, $3+5$, $4+5$ resp.

   Svar: Utöver talet 5 finns ytterligare ett rödfärgat tal, 10. De övriga åtta talen är blåfärgade.

2. Lösning 1. Då polynomet P har formen

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + x^n$$

ska insättning av x^2+1 i stället för x ge uttrycket $6x^4 - x^2 + 5$. Vi måste ha $n = 2$ och får efter kvadratkomplettering

$$P(x^2+1) = 6x^4 - x^2 + 5 = 6(x^2+1)^2 - 12x^2 - 6 - x^2 + 5 = 6(x^2+1)^2 - 13(x^2+1) + 12.$$

Härav följer, eftersom framställningen är entydig, att $P(x) = 6x^2 - 13x + 12$ och med x utbytt mot $x^2 - 1$ att

$$P(x^2-1) = 6(x^2-1)^2 - 13(x^2-1) + 12 = 6x^4 - 25x^2 + 31.$$

Lösning 2. Alternativt kan man, eftersom P har grad 2, ansätta $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$ och identifiera a_2, a_1 och a_0. Det ska alltså gälla att

$$a_2(x^2+1)^2 + a_1(x^2+1) + a_0 = 6x^4 - x^2 + 5.$$

Men vänsterledet är lika med

$$a_2x^4 + (2a_2 + a_1)x^2 + (a_2 + a_1 + a_0).$$

Identifiering ger $a_2 = 6$, $a_1 = -1 - (2 \cdot 6) = -13$, $a_0 = 5 - 6 - (-13) = 12$. Det sökta polynomet är alltså $P(x) = 6x^2 - 13x + 12$ och vi avslutar på samma sätt som i föregående lösning.

Svar: $P(x^2-1) = 6x^4 - 25x^2 + 31$.

3. Om n är delbart med 3 är förstås n^2 också delbart med 3. Om n är på formen $3k \pm 1$ är n^2 på formen $9k^2 \pm 6k + 1$, dvs om n inte är delbart med 3 ger n^2 resten 1 vid division med 3. Bland tre på varandra följande heltal finns det alltid ett tal som är delbart med 3 och två som inte har denna egenskap. Det innebär att $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ ger resten 2 vid division med 3 för varje heltal n. Men eftersom 0 och 1 är enda möjliga rester när en heltalskvadrat divideras med 3, finns det alltså ingen lösning till den givna ekvationen.

4. Lösning 1. Vi ska först visa att projektionen av triangeln på något av planen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ måste vara en triangel vars hörn har heltalskoordinater. Om projektionen på något av planen inte är en triangel måste den bestå av en sträcka.

   Om projektionerna på exempelvis xz-planet och yz-planet båda utgörs av sträckor måste triangeln ligga i ett plan som är ortogonalt mot såväl xz- som yz-planet, vilket betyder att triangeln ligger i ett plan parallellt med xy-planet. Projektionen på detta plan måste då vara en triangel. Högst två av projektionerna kan således utgöras av sträckor; den tredje måste vara en triangel och enligt förutsättningarna ha heltalskoordinater.

   Låt oss nu anta att projektionen på xy-planet utgörs av en triangel med koordinaterna (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Om denna triangel har en area som är $\geq \frac{1}{2}$ måste detsamma gälla den ursprungliga triangeln.
   Enligt areaformeln gäller att triangelarean är lika med

$$\frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|,$$

   Eftersom uttrycket innanför beloppstecknet är ett heltal, som enligt förutsättningarna måste vara skilt från 0, är arean $\geq \frac{1}{2} \cdot$ (det minsta möjliga heltalet), dvs $\geq \frac{1}{2} \cdot 1$. Men om projektionens area är $\geq \frac{1}{2}$ måste också den projicerade triangelns area vara $\geq \frac{1}{2}$.

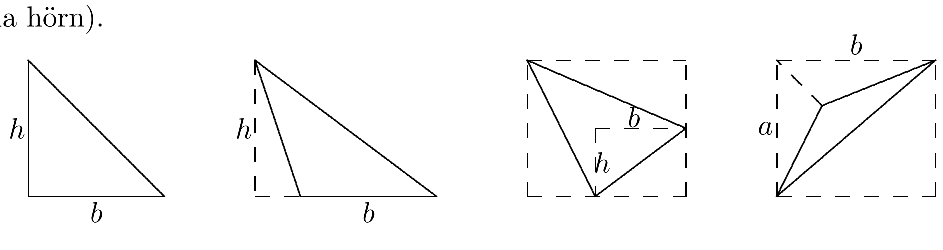
   Lösning 2. Vi använder oss av att det på något av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ finns en projektion som är en triangel vars hörn har heltalskoordinater. Vi särskiljer följande fyra fall.

   1) Triangeln har två av sina sidor parallella med koordinataxlarna

   2) Triangeln har precis en sida parallell med en koordinataxel.

   3) Triangeln kan inskrivas i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna så att ett triangelhörn sammanfaller med ett rektangelhörn medan de båda övriga triangelhörnen ligger på var sin rektangelsida (men inte i något rektangelhörn).

   4) Triangeln kan inskrivas i en rektangel precis som i 3) men på sådant sätt att två av triangelhörnen sammanfaller med två diagonalt belägna rektangelhörn, medan det tredje triangelhörnet ligger i det inre av rektangeln (men inte på diagonalen mellan nämnda hörn).



   I fallen 1) och 2) är såväl basen b som höjden h hela tal varför arean är lika med $b \cdot h/2 \geq 1/2$.

   I fallet 3) kan vi avskära en deltriangel till den betraktade triangeln med basen b och höjden h som båda är heltal enligt förutsättningarna. Deltriangeln har då en area som är $\geq 1/2$. Detsamma måste gälla för hela triangeln.

I fall 4) kan arean av triangeln uttryckas som differensen mellan halva rektangelarean ab och summan av två triangelareor $T_1 + T_2$. Eftersom triangelhörnet i det inre av rektangeln har heltalskoordinater måste såväl T_1 som T_2 vara på formen *heltal/2.* Detta gäller då också för den betraktade triangeln, men då dess area är positiv kan denna inte understiga 1/2.
Vi har alltså funnit att projektionens area är $\geq \frac{1}{2}$, varav följer att också den ursprungliga triangelns area är $\geq \frac{1}{2}$.

5. Primtalet p har derivatan $p' = 1$. Samma derivata får vi förstås om vi skriver talet som $1 \cdot p$:

$$(1 \cdot p)' = 1' \cdot p + 1 \cdot p' = 1' \cdot p + 1,$$

vilket är lika med 1 om och endast om $1' = 0$.
Vidare finner vi att

$$0' = (0 \cdot p)' = 0' \cdot p + 0 \cdot p' = 0' \cdot p,$$

dvs $0' = 0' \cdot p$, varav $0' = 0$. Talet 0 är alltså lika med sin derivata.
Vi deriverar därefter p^2, p primtal:

$$(p^2)' = p'p + pp' = 2pp' = 2p.$$

Derivatan av p^3 blir

$$(p^3)' = (p^2)'p + p^2p' = 2p^2 + p^2 = 3p^2,$$

dvs man kan misstänka att derivatan av p^r är rp^{r-1} för varje positivt heltal r. Vi visar detta med induktion. Påståendet är uppenbarligen sant för $r = 1$. Antag att påståendet är sant för $r = m$, dvs att $(p^m)' = mp^{m-1}$. Vi ska visa att påståendet då också måste gälla för $r = m + 1$. Men

$$(p^{m+1})' = (p^m)'p + p^mp' = mp^{m-1} + p^m = (m + 1)p^m$$

och påståendet följer.
Betrakta tal på formen p^rq^s, där p och q är primtal och heltalen r och s är båda ≥ 1. Derivatan blir:

$$(p^rq^s)' = rp^{r-1}q^s + p^rsq^{s-1} = (p^rq^s)\left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q}\right) = n\left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q}\right).$$

Detta resultat kan generaliseras: Om talet n är på formen $p_1^{r_1}p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ blir derivatan

$$(p_1^{r_1}p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k})' = n\left(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_2}{p_2} + \ldots + \frac{r_k}{p_k}\right). \tag{1}$$

Vi ska nu visa att derivatan är väldefinierad, dvs att varje faktorisering leder fram till representationen (1).
Vi konstaterar att derivatan är väldefinierad för alla naturliga tal ≤ 12. Exempelvis finner vi att $12'$ ger värdet 16 på derivatan såväl för faktoriseringen $2 \cdot 6$ som för $3 \cdot 4$. Antag att det ställda påståendet inte är sant, dvs att det finns åtminstone ett tal n för vilket användande av regel 2 leder fram till skilda värden på derivatan om n faktoriseras på två olika sätt. Låt n_0 vara det minsta värdet på n för vilket detta gäller. Vi ska visa att faktoriseringen

$$n_0 = (p_1^{r_1-t_1}p_2^{r_2-t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k-t_k})(p_1^{t_1}p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}) = A \cdot B \text{ säg},$$

inte beror av talen $t_1, t_2, \ldots, t_k$, där $1 \leq t_i \leq r_i, i = 1, 2, \ldots, k$.
Här kan vi förutsätta att båda faktorerna är ≥ 2. Men i så fall är derivatan av varje faktor väldefinierad och uppfyller (1) :

$$(n_0)' = A' \cdot B + A \cdot B' = A\big(\frac{r_1 - t_1}{p_1} + \frac{r_2 - t_2}{p_2} + \ldots + \frac{r_k - t_k}{p_k}\big) \cdot B$$
$$+ A \cdot B\big(\frac{t_1}{p_1} + \frac{t_2}{p_2} + \ldots + \frac{t_k}{p_k}\big) = AB\big(\frac{r_1}{p_1} + \frac{r_2}{p_2} + \ldots + \frac{r_k}{p_k}\big),$$

som inte beror av faktoriseringen. Det finns följaktligen inte något minsta tal för vilket derivatan inte är väldefinierad. Vi har fått en motsägelse och därmed är derivatan väldefinierad för varje naturligt tal n samt att den verkligen har formen (1).

Vi fann att talet $n = 0$ var lika med sin derivata. Finns det andra tal för vilket detta gäller? Om talet n är på formen p^r, p primtal, blir villkoret att $p^r = rp^{r-1}$, vilket är uppfyllt om och endast om $r = p$.

Enligt (1) är derivatan ≥ 1 för varje naturligt tal ≥ 2. Betrakta nu ett tal på formen Ap^r, där A är ett positivt heltal ≥ 2 och som inte är delbart med primtalet p, samt där r är ett heltal ≥ 1. Kan talet vara lika med sin derivata? Derivatan är

$$(Ap^r)' = A'p^r + Arp^{r-1}.$$

För att detta ska vara lika med Ap^r måste $A'p + Ar = Ap$, vilket förutsätter att r är delbart med p. Men om $r = sp$ med $s \geq 1$, får vi $A' + A(s-1) = 0$, vilket är omöjligt eftersom vänsterledet alltid är > 0.

Svar: Talet 0 och alla tal på formen p^p, där p är primtal, är de enda naturliga tal som är lika med sin derivata.

6. Från ekvation 1 inser vi att $y > 0$ och därefter från ekvation 2 att $x > y$. Med högerled som båda är heltal kan det ligga nära till hands att undersöka om det finns några heltalslösningar. Från ekvation 1 ser vi att $x + y$ kan vara högst 3. Enda möjlighet är att $y = 1$ och $x = 2$, som visar sig vara en lösning. Vi frågar oss om det finns flera lösningar. Från den andra ekvationen får vi

$$x = \left(y^3 + \frac{7}{y}\right)^{1/3},$$

som insatt i första ekvationen ger

$$y\left(\left(y^3 + \frac{7}{y}\right)^{1/3} + y\right)^2 = 9$$

eller

$$\left(\left(y^{9/2} + 7y^{1/2}\right)^{1/3} + y^{3/2}\right)^2 - 9 = 0.$$

Eftersom varje y-term är strängt växande i y för $y > 0$ är hela uttrycket i vänster led en strängt växande funktion av y (för $y > 0$). Ekvationen har således endast lösningen $y = 1$ och systemet är alltså entydigt lösbart med lösningen $x = 2$, $y = 1$.

Svar: Ekvationssystemet har den entydiga lösningen $x = 2$, $y = 1$.