SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 23 november 2002

1. Summan av talen på platserna $1-20$ är 75. Summan av talen på platserna $2-21$ är också 75. Vi får alltså samma summa om vi ersätter talet på plats 1 med talet på plats 21. Dessa tal är således lika. Denna periodicitet gäller allmänt: talen på platserna k, $k+20$, $k+40, \ldots$ är lika för varje heltal k. Vi kan förstås fortsätta cirkeln runt ett obegränsat antal varv.

   Sålunda har vi samma tal på platserna $1, 21, 41, \ldots, 241, 261, 13$ osv (det återstod ju $268-261=7$ tal på det första varvet, varför nästa tal i cykeln blir nr 13 på det andra varvet). Men samma tal måste vi då också ha på platserna

   $33, 53, \ldots, 233, 253, 5\,(=273-268)$ osv, och därmed också på platserna

   $25, 45, \ldots, 245, 265, 17$ osv, och sedan även på platserna

   $37, 57, \ldots, 257, 9$ osv.

   Sammanfattningsvis är talen på platserna 1, 5, 9, 13 och 17 alla lika.

   Analogt finner vi att talen på platserna 2, 6, 10, 14 och 18 är lika; att talen på platserna 3, 7, 11, 15 och 19 är lika samt att talen på platserna 4, 8, 12, 16 och 20 är lika. Talföljden är därmed periodisk med perioden 4.

   Bland 20 på varandra följande tal uppträder perioden fem gånger. Summan av talen på platserna $1-20$ är följaktligen en femtedel av summan av talen nr $1-20$, dvs är lika med 15.

   Nu vet vi att talet på plats 17 och därmed också på plats 1 är 3;

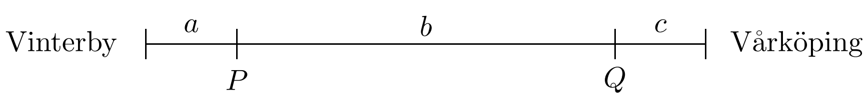
   att talet på plats 83 och därmed på plats 3 är 4;

   att talet på plats 144 och därmed på plats 4 är 9.

   Men då måste talet på plats 210, vilket är detsamma som talet på plats 10 eller talet på plats 2, vara lika med $15-(3+4+9)=-1$.

   SVAR: Talet på plats 210 är -1.

2. För att alla ska hinna fram och tid måste var och en åka vespa längs någon del av sträckan. Detta kan vi åstadkomma på följande sätt. Antag att punkterna P och Q delar upp den totala sträckan i tre delsträckor av längderna a, b och c som figuren visar. Vi har $a+b+c=62$.

   Antag att A och B åker vespa från Vinterby till punkten Q, varefter B fortsätter mot Vårköping till fots, medan A vänder och hämtar upp C som under tiden har hunnit promenera fram till punkten P. Därefter åker A och C vespa hela vägen fram till Vårköping.

   A kör $(a+b)+b+(b+c)=(a+b+c)+2b=62+2b$ km med 50 km/h;

   B åker $a+b=62-c$ km med 50 km/h och går c km med 5 km/h;

   C går a km med 5 km/h och åker $b+c=62-a$ km med 50 km/h.

   För att A ska hinna fram i tid, måste det gälla att

$$\frac{62+2b}{50}<3 \text{ som är uppfyllt om } b<(150-62)/2=44 \text{ km.}$$

För att B ska hinna fram i tid, måste det gälla att

$$\frac{62-c}{50} + \frac{c}{5} < 3 \text{ dvs att } (62-c) + 10c < 150 \text{ eller } c < 88/9 = 9\tfrac{7}{9} \text{ km.}$$

För att C ska hinna fram i tid, måste det analogt gälla att

$$a < 9\tfrac{7}{9} \text{ km.}$$

Av de två sista villkoren följer att

$$a + c < 2 \cdot 9\tfrac{7}{9} = 19\tfrac{5}{9} \text{ km, dvs att} \quad b > 62 - 19\tfrac{5}{9} = 42\tfrac{4}{9} \text{ km .}$$

Tydligen hinner alla tre i tid till marknaden om $42\frac{4}{9} < b < 44$. För att de tre ska anlända till Vårköping samtidigt krävs att

$$\frac{62+2b}{50} = \frac{62-c}{50} + \frac{c}{5} = \frac{a}{5} + \frac{62-a}{50}$$

eller

$$62 + 2b = 62 + 9a = 62 + 9c,$$

vilket inträffar om

$$a = c = \tfrac{2}{9}b, \text{ dvs om } \tfrac{2}{9}b + \tfrac{2}{9}b + b = 62,$$

varav

$$b = \frac{9 \cdot 62}{13}b = 42\tfrac{12}{13} \text{ km.}$$

De anländer då efter

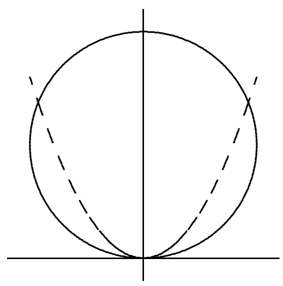
$$\frac{62+2b}{50} = \frac{62 + 2 \cdot 42\frac{12}{13}}{50} = \frac{961}{325} = 2\tfrac{311}{325} \text{ h,}$$

eller ungefär 2 min 35 sek före utsat tid.

SVAR: Ja, de kan komma i tid till marknaden.

3. Den aktuella cirkeln har ekvationen

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$



För att parabeln och cirkeln ska skära varandra i punkten $(x, y) = (x, ax^2) \neq (0, 0)$, måste det gälla att

$$x^2 + (ax^2 - 1)^2 = 1,$$

dvs att

$$x^2 + a^2x^4 - 2ax^2 + 1 = 1 \text{ eller } x^2(a^2x^2 - (2a-1)) = 0.$$

Utöver $(x, y) = (0, 0)$ gäller för varje tänkbar skärningspunkt (x, y) att $x^2 = \frac{2a-1}{a^2}$. För att x ska vara skilt från noll måste vi ha $2a - 1 > 0$ eller $a > \frac{1}{2}$. Detta är uppenbarligen ett nödvändigt villkor. Vi får då $x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$. Frågan är om villkoret också är tillräckligt. Vi måste då visa att för nämnda värden på a ligger $x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$ mellan -1 och $+1$. Men detta är uppenbarligen uppfyllt, eftersom $x^2 = \frac{a^2-(1-a)^2}{a^2} = 1 - \frac{(1-a)^2}{a^2} < 1$.

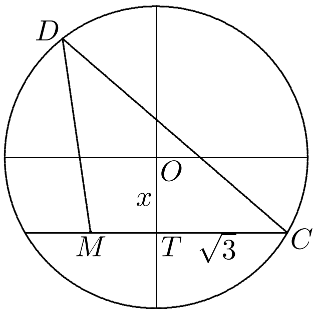
Svar: Cirkeln och parabeln skär varandra i ytterligare två punkter för varje $a > \frac{1}{2}$.

4. Låt oss beteckna $k^{\frac{1}{k-7}}$ med $n(k)$. Direkt ser vi att $n(8) = 8$ och $n(9) = 9^{\frac{1}{2}} = 3$. Däremot är inte $n(10) = 10^{\frac{1}{3}}$ något heltal, eftersom $8^{\frac{1}{3}} < 10^{\frac{1}{3}} < 27^{\frac{1}{3}}$, vilket innebär att $2 < n(10) < 3$. Vidare är $n(11) = 11^{\frac{1}{4}} < 16^{\frac{1}{4}} = 2$. Men $n(k) > 1$ för varje k, eftersom exponenten $\frac{1}{k-7}$ är större än 0.
Vi noterar således att
$$n(8) > n(9) > n(10) > n(11)$$
samt att $1 < n(11) < 2$. Gäller det allmänt att $n(k)$ är en avtagande funktion i (k)? I så fall skulle det gälla att $1 < n(k) < 2$ för alla $k > 11$.
Men $n(12) = 12^{\frac{1}{5}} < (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$, $n(13) = 12^{\frac{1}{6}} < (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2$ osv. Här använder vi oss av att $k + 7 < 2^k$, i varje fall för $k = 4, 5, 6$. Men detta gäller även för heltal $k > 6$. Detta följer induktivt av att om olikheten är uppfylld för $k = m$, dvs om $m+7 < 2^m$, så är $m+8 = (m+7)+1 < 2^m + 2^m = 2^{m+1}$ och därmed är olikheten uppfylld också för $k = m + 1$. Enligt induktionsprincipen är följaktligen olikheten uppfylld för varje heltal $k \geq 7$.
Svar: Endast för $k = 8$ och $k = 9$ antar $k^{\frac{1}{k-7}}$ heltalsvärden.

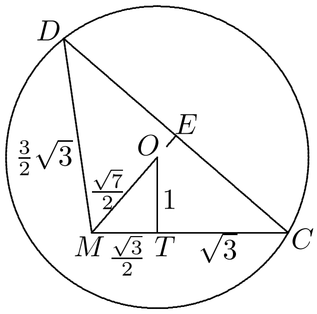
5. Vi noterar att vänsterledet av den första ekvationen inleds med $\alpha^3 - 3\alpha^2$, som ingår i utvecklingen av $(\alpha - 1)^3$. Låt oss undersöka vad som händer om vi skriver nämnda vänsterled som en funktion av $\alpha - 1$. Vi får:
$$(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) + (2\alpha - 2) - 14 = (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) - 14 = 0,$$
dvs $\alpha - 1$ löser ekvationen $x^3 + 2x - 14 = 0$.
Om vi modifierar vänsterledet av den andra ekvationen på samma sätt får vi
$$(\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta - 1) + (2\beta - 2) - 14 = (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) + 14 = 0,$$
men vi får nu $+14$ i stället för -14. Om vi multiplicerar ekvationen med -1 får vi emellertid
$$-(\beta - 1)^3 - 2(\beta - 1) - 14 = 0 \quad \text{eller} \quad (1 - \beta)^3 + 2(1 - \beta) - 14 = 0,$$
och vi ser att också $1 - \beta$ löser ekvationen $x^3 + 2x - 14 = 0$.
Vilket samband råder mellan lösningarna $\alpha - 1$ och $1 - \beta$? Derivering av funktionen $f(x) = x^3 + 2x - 14$ ger
$$f'(x) = 3x^2 + 2,$$
som är positivt för alla värden på x. Följaktligen är $f(x)$ strängt växande i x och kan därför ha högst ett nollställe. Om $\alpha - 1$ och $1 - \beta$ båda är nollställen till $f(x)$ måste de sålunda vara lika och det gäller att $\alpha - 1 = 1 - \beta$, dvs att $\alpha + \beta = 2$.
Svar: Talen α och β har summan 2.

6. Vi låter hörnen i tetraedern vara A, B, C och D och vi söker längden av kanten CD. De övriga kanterna har alla längden 3. Vi låter ett plan skära klotet så att det passerar genom punkterna A, B och C. Låt oss kalla detta plan för basplanet. Snittet utgör en cirkel, C_{ABC}, med den liksidiga triangeln ABC inskriven. Triangeln har arean $\frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ och vi finner att cirkelradien är
$$r = \frac{27}{9\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\big($ = produkten av triangelsidornas längder dividerad med 4·(arean)$\big)$.
Normalen genom cirkelns medelpunkt T, som tillika är medelpunkt i triangeln ABC, passerar genom klotets medelpunkt O. Vi låter ytterligare ett plan, här kallat höjdplanet, skära klotet. Detta plan är ortogonalt mot basplanet, passerar genom punkterna C och D samt mittpunkten, M, på kanten AB. Höjdplanet passerar därmed också genom punkterna T och M. I figur 2a ser vi den cirkel som utgör snittet mellan höjdplanet och klotet. Om avståndet mellan basplanet och klotets medelpunkt är x, så följer enligt Pythagoras sats tillämpad på triangeln CTO att $x = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$.



Figur 2a



Figur 2b

Vi observerar att MC utgör höjden mot sidan AB i triangeln ABC, medan MD är höjden mot sidan AB i triangeln ABD. Båda höjderna har längden $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. I figur 2b återger vi på nytt höjdplanets snitt med klotet. Det återstår att bestämma längden av kanten CD, dvs längden av sidan CD i triangeln CMD. Eftersom triangeln är likbent passerar bisektrisen till vinkeln M genom punkterna O och E, där E är mittpunkten på sidan CD. Följaktligen kommer sträckan EM att utgöra höjden mot sidan CD i triangeln CMD. Eftersom den rätvinkliga triangeln OTM har kateterna 1 och $\sqrt{3}/2$ följer ur Pythagoras sats att hypotenusan OM är $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
De rätvinkliga trianglarna OTM och CEM är likformiga, eftersom de har en vinkel gemensam. Av likformigheten följer att

$$\frac{|CE|}{|CM|} = \frac{|OT|}{|OM|} \text{ dvs att } \frac{|CE|}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}},$$

varav $CE = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Kanten CD har således längden $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Svar: Kanten CD har längden $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \approx 3.928$.