Kvalificeringstävlingen 2004, förslag till lösningar

1. Vi ser att vi kan resa från A till E via städerna B och D längs delsträckorna AB, BD och DE, som tillsammans har längden 8 mil. Detta avstånd överensstämmer exakt med längden av sträckan AE. Eftersom summan av delsträckornas längder är minst lika med hela sträckans längd, måste städerna B och D ligga längs vägen mellan A och E.

Vidare konstaterar vi att sträckorna AC, CD och AD har de respektive längderna 5, 3 och 4 mil, vilket innebär att städerna A, C och D bildar hörn i en rätvinklig triangel med rät vinkel vid D.

Men i så fall är också triangeln CDE rätvinklig med kateterna CD och DE med längderna 3 och 4, medan hypotenusan följaktligen har längden 5 mil. Avståndet mellan C och E är således 5 mil.

Svar: Avståndet mellan C och E är 5 mil.

2. Låt de fyra talen vara a, b, c, d med summan $s = a + b + c + d$, där vi utan inskränkning kan anta att $a < b < c < d$. Observera att talen måste vara olika, ty annars skulle vi få minst två dubbletter bland de sex parsummorna.

De sex parsummorna kan paras samman och på tre skilda sätt bilda summan s:

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c) = s.$$

Låt den felande summan vara x. Då gäller att $x + r = s$, där r är en av de fem redovisade parsummorna, samtidigt som summan av de fyra övriga parsummorna är lika med $2s$, ett jämnt tal. Eftersom summan av de fem parsummorna är 71, måste r vara udda, vilket ger tre möjliga värden på r: 7, 11 och 23.

Om $r = 7$ blir $s = 32$ och $x = 25$, men eftersom vi bara kan bilda summan 32 på ett sätt, som $7 + 25$, förkastas detta fall. Om $r = 23$ blir $s = 24$ och $x = 1$, men en parsumma med två olika positiva termer kan inte vara lika med 1. Om $r = 11$ blir $s = 30$ och $x = 19$, och här går det att bilda summan 30 på tre sätt: $7 + 23 = 11 + 19 = 12 + 18 = 30$. Den felande parsumman är alltså 19 och det återstår nu att bestämma de fyra tal som ger parsummorna 7, 11, 12, 18, 19 och 23.

Till följd av våra antaganden är

$$a + b < a + c < min\{a + d, b + c\} < max\{a + d, b + c\} < b + d < c + d.$$

Det betyder att den minsta summan är $a + b = 7$, varav $b = 7 - a$, och den näst minsta är $a + c = 11$, vilket ger $c = 11 - a$. Då den största summan är $c + d = (11 - a) + d = 23$ är $d = 12 + a$, vilket ger $a + d = 12 + 2a$. Men detta ska vara lika med någon av de båda ”mittsummorna”, dvs antingen 12 eller 18. Eftersom a är positivt måste summan vara 18 och alltså $a = 3$, vilket i tur och ordning ger $b = 4$, $c = 8$ och $d = 15$.

Svar: Den felande summan är 19 och de fyra talen är 3, 4, 8 och 15.

3. Om vi dividerar täljare och nämnare med mn övergår uttrycket i

$$\frac{1}{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2}=\frac{1}{(\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}})^2},$$

vilket också kan skrivas

$$\frac{1}{(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}})^2+4}.$$

Uttrycket antar sitt maximivärde när kvadraten i nämnaren är så liten som möjligt: differensen är lika med 0 om och endast om $m = n$. Uttryckets största värde är alltså $\frac{1}{4}$.

Uttrycket antar sitt minimivärde när kvadraten i nämnaren är så stor som möjligt. Detta inträffar när differensens absolutvärde är så stort som möjligt, dvs när $\frac{m}{n}$ antar sitt minsta värde och $\frac{n}{m}$ antar sitt största värde (eller omvänt). Uttrycket är alltså så litet som möjligt när $m = 1$ och $n = 2004$ eller $m = 2004$ och $n = 1$. Uttrycket blir i dessa fall lika med $\frac{1\cdot 2004}{(1+2004)^2}=\frac{2004}{4020025}$.

Alternativa ansatser. Studera funktionen $f(x) = x+\frac{1}{x}$, där $x = \frac{m}{n}$. Visa maximum och minimum via derivering. Man kan också skriva uttrycket på formen $y(1-y)$, där $y = \frac{m}{m+n}$.

Svar: Uttryckets största värde är $\frac{1}{4}$, medan dess minsta värde är $\frac{2004}{(2005)^2}$

4. Låt de n talen vara $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vi studerar fallet $k = n-1$ (vilket visar sig räcka). Vi utesluter i tur och ordning talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ och bildar medelvärdet av de återstående talen. De $n = k + 1$ medelvärdena

$$\frac{1}{k}(S-a_1),\ \frac{1}{k}(S-a_2),\ \ldots,\ \frac{1}{k}(S-a_n)$$

är alla heltal (detta gäller förstås även de ingående summorna), och då måste också medelvärdenas summa, dvs

$$\frac{1}{k}((k+1)S-(a_1+a_2+\ldots+a_n))=\frac{kS}{k}=S,$$

också vara ett heltal. Men om S är ett heltal och $S - a_i$ är ett heltal för varje i, måste följaktligen a_i vara ett heltal för varje i.

5. Betrakta ballongen efter att den har fallit ned. Om tangeringspunkten mellan sfären och planet ligger i en punkt P, som utgör centrum av en ruta med sidan 1, har vi samma avstånd till de fyra omgivande spikarna, nämligen $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ballongen har då alltid chansen att klara sig om $R < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Speciellt gäller detta om spiklängden är minst lika med radien, dvs för $R < \frac{\sqrt{2}}{2} \leq h$ är det alltid möjligt.

Om $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ kan radien tillåtas vara större. Vi låter sfären fortfarande tangera planet i punkten P. Kravet är nu att en storcirkel parallell med planet på höjden h över planet inte får nudda spikspetsarna. Vi inser att detta är tillgodosett om $R < d$ för ett tal d som det återstår att bestämma. Detta betyder att sfären nuddar de fyra närmaste spetsarna om $R = d$.

Låt sfärens medelpunkt vara O. Antag att lodlinjen genom O genom tangeringspunkten P träffar planet genom nämnda storcirkel i punkten Q. Antag vidare att sfären nuddar en av spikarna i punkten S. Här har vi förutsatt att $|PQ| = h < \frac{\sqrt{2}}{2}$, medan $d > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Punkterna O, Q och S utgör då hörn i en rätvinklig triangel med sidorna $|OQ| = d - h$, $|SQ| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och $|OS| = d$.

Pythagoras sats ger

$$d^2 = \frac{1}{2} + d^2 - 2dh + h^2,$$

varav

$$d = \frac{h^2 + \frac{1}{2}}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{1}{4h}.$$

Ballongen kommer således att spricka om $R \geq d$ och har chans att klara sig om $R < d$, där $d = \frac{h}{2} + \frac{1}{4h}$.

Svar: Om $h \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ kan ballongen klara sig om $R < \frac{\sqrt{2}}{2}$ medan om $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ har den chansen om $R < \frac{h}{2} + \frac{1}{4h}$.

6. De n blå punkterna kan förenas med de n gula punkterna på $N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ olika sätt (vi har n valmöjligheter för den första sträckan, $n - 1$ möjliga val för den andra osv, dvs vi har N möjliga grafer, $g_1, g_2, \ldots, g_N$, säg. Låt oss för varje graf g beteckna den sammanlagda längden av de n sträckorna med $L(g)$.

Antag att g är en graf som innehåller varandra skärande sträckor och där varje sträcka har en blå och en gul ändpunkt: Genom att låta två skärande sträckor skifta ändpunkter i någon av färgerna (exempelvis de blå) blir resultatet två icke skärande sträckor (diagonalerna i en konvex fyrhörning ersätts med två motstående sidor i fyrhörningen; konstruktionen medför att den aktuella fyrhörningen måste vara konvex, dvs diagonalerna passerar genom det inre av fyrhörningen).

Vi noterar därvid att de båda skärande sträckorna måste ha en sammanlagd längd som strikt överstiger sammanlagda längden av de båda icke-skärande sträckorna. De skärande och de icke skärande sträckorna bildar nämligen två trianglar; i var och en av dessa gäller att två av sidorna alltid har en sammanlagd längd som är strikt större än längden av den tredje sidan ("triangelolikheten").

Varje gång som vi på detta sätt avlägsnar en skärning mellan två sträckor kan vi visserligen råka bilda nya skärningar, men den nya grafen kommer alltid att ha en total längd som är strikt kortare än den föregående. Vi får på detta sätt en följd av grafer g_{r_1}, g_{r_2}, g_{r_3} ..., som alla är olika eftersom de har olika graflängd. Då $L(g_{r_1}) > L(g_{r_2}) > L(g_{r_3}) > \ldots$ och då antalet olika grafer är ändligt, måste processen sluta efter ett ändligt antal steg, dvs när graflängden inte längre kan minskas. Men då måste vi också ha åstadkommit en graf som saknar skärande linjer, ty annars skulle vi ha kunnat minska den totala längden ytterligare. Därmed är påståendet visat.

Alternativ ansats: Induktion (detta begrepp ingår normalt inte i gymnasieskolans kurser, varför ingen detaljerad lösning ges här): Påståendet är trivialt sant för $n = 1$. Antag att påståendet är sant för $n = 1, 2, \ldots p$. Om vi kan visa att påståendet då också måste vara sant för $n = p + 1$ måste påståendet gälla för varje positivt heltal n.