SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 4 oktober 2000

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x+y &= \sqrt{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. För vilka positiva heltal a, b och c, där $a \le b \le c$, gäller det att
$$abc = 84 \text{ och } (a+1)(b+1)(c+1) = 180?$$

3. Fyra personer, A, B, C och D, startar samtidigt från samma plats och färdas samma sträcka med sina bilar. De kör med konstant fart och kommer i mål efter varandra med lika stora tidsdifferenser mellan sig. D, som kommer sist, kör bara hälften så fort som A, som kommer först. Hur mycket långsammare är C, som kommer näst sist, i förhållande till B?

4. Visa olikheten
$$\frac{a^3+2a+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^3}}{a+\frac{1}{a}} \ge 3$$
för $a > 0$. För vilka värden på a gäller likhet?

5. I en parallellogram är vinkeln mellan diagonalerna $45°$. Hur stor blir kvoten mellan diagonalernas längder om kvoten mellan de icke-parallella sidornas längder är maximal?

6. En mängd M av naturliga tal innehåller alla tal som är större än 2000 samt några (minst ett) som är mindre. För varje heltal n låter vi $f(n)$ beteckna antalet tal m i mängden M sådana att summan $m+n$ *inte* tillhör M.
Visa att $f(-n) = f(n) + n$.

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress
www.math.uu.se/~dag/skolornas.html