SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 1 oktober 2003

1. Petra har totalt 1 000 kr i sedlar av valörerna 20, 50, 100 och 500 kr och inga andra sedlar. Hon har minst en sedel av varje valör och fler 50-kronorssedlar än 20-kronorssedlar. Hur många sedlar har Petra?

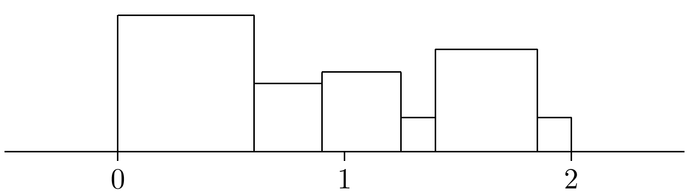
2. Dela in de elva talen 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 och 73 i två grupper så att summan av talen i den ena gruppen är jämnt delbar med summan av talen i den andra.

3. Lös ekvationen
$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{4}{x+1}$$
i reella tal x.

4. I den liksidiga triangeln ABC har sidorna längden $\sqrt{2}$. Utanför denna triangel, i samma plan, ligger punkten O så att triangeln AOC är likbent och vinkeln AOC rät. I punkten O sitter en myra. Den går rakt mot punkten A, passerar den och fortsätter i samma riktning tills den kommer tilll punkten P sådan att $|OA| = |AP|$. I punkten P vänder myran och går rakt mot B och vidare till punkten Q sådan att $|PB| = |BQ|$. Där vänder myran och går rakt mot C och vidare till punkten R sådan att $|QC| = |CR|$.
   Beräkna myrans avstånd till startpunkten då den befinner sig i R.

5. På hörnen i en regelbunden 2003-hörning placeras brickor som har en röd och en blå sida. Följande operation är tillåten: Om två hörn med en gemensam kant har brickor med samma färg upp, får man vända på dessa brickor. Visa att man kan göra sådana operationer tills alla brickor har samma färg upp, oavsett hur färgerna var fördelade från början.

6. En sträcka av längden 2 är indelad i n ($n \geq 2$) delintervall. På varje delintervall ritar man upp en kvadrat. Antag att summan av kvadraternas areor är större än 1.
   Visa att man då alltid kan välja ut två delintervall vilkas sammanlagda längd är större än 1.



Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress www.math.uu.se/~dag/skolornas.html