SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 4 oktober 2005

1. En rörledning skall dras från A till B, en sträcka på 2005 m, genom att man sätter samman rör av längderna 13 och 17 m. Det är bara möjligt att koppla ihop rör av olika längd, dvs i en rörledning måste vartannat rör ha längden 13 m, vartannat längden 17 m. Varje skarv är 1 m lång, dvs vid övergången från ett rör till ett annat har vi en överlappning om 1 m.
   Är det möjligt att dra ledningen utan att behöva kapa något rör?

2. Bestäm alla reella tal a sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + 10 - 12a + 4a^2 = 0$$

   har minst en reell lösning.

3. Amanda och Botvid är medlemmar i Gullholmens Matematikförening och skall arrangera en arbetsmiddag för sig själva och ytterligare 5 medlemmar: Camilla, Daniela, Efraim, Folke och Göran. De sju personerna skall placeras kring ett runt bord. Eftersom Efraim, Folke och Göran är osams, gäller att ingenstans får två av dessa tre sitta bredvid varandra. I övrigt finns inga restriktioner beträffande bordsplaceringen. På hur många sätt kan denna göras? Placeringar som skiljer sig endast genom en rotation kring bordet betraktas som samma.

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $f\big(f(x)\big) = x$, där $f(x)$ är polynomet $x^2 - 2x + 2$.

5. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara heltal med summan 1. Kan polynomet

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

   uppfylla att $f(3) = 2005$?

6. Låt M vara mittpunkten på sidan BC av parallellogrammen $ABCD$. Låt E vara den punkt på sträckan AM för vilken vinkeln DEM är rät. Visa att triangeln DEC är likbent.

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress www.math.uu.se/~dag/skolornas.html