SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 6 oktober 1999

1 Låt n_B vara antalet personer med blå ögon, låt n_L vara antalet ljushåriga personer och låt n_{BL} vara antalet ljushåriga personer med blå ögon. Låt vidare n vara totala antalet personer i befolkningen. Enligt förutsättningarna är

$$\frac{n_{BL}}{n_B} > \frac{n_L}{n}.$$

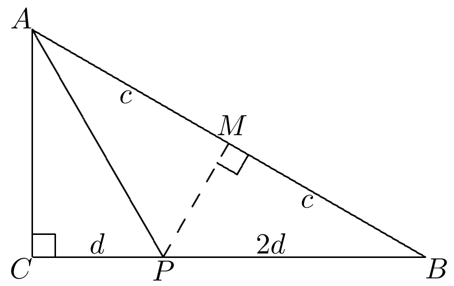
Detta förutsätter att såväl n_B som n_{BL} är större än 0 och därmed att n_L är större än 0. Men då måste också gälla att

$$\frac{n_{BL}}{n_L} > \frac{n_B}{n},$$

vilket just uttrycker att andelen med blå ögon av de ljushåriga är större än andelen med blå ögon av hela befolkningen.

Svar: Ja.

2 Betrakta den utvikta triangeln ABC med vecket enligt figuren markerat som sträckan MP, vinkelrätt mot sidan AB. Här är M mittpunkten på sidan AB och P ligger på sidan BC. Låt c=$|AM| = |MB|$ och $d = |CP|$.



Eftersom trianglarna PAM och PBM är kongruenta är deras sammanlagda area dubbelt så stor som arean av triangeln ACP, och basen PB i triangeln APB måste därför ha längden $2d$. Triangeln PBM är likformig med triangeln ABC (trianglarna är rätvinkliga och har vinkeln B gemensam), vilket ger sambandet $\frac{c}{2d} = \frac{3d}{2c}$, varav $c = \sqrt{3}d$. Vi får $\cos \angle ABC = \frac{c}{2d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vilket betyder att vinkeln ABC är 30°.

Svar: Vinkeln ABC är 30°.

3. Eftersom $x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ kan ekvationen skrivas

$$(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - (1 - \sqrt{a})) = 0.$$

En rot är förstås $x = a$, där a måste vara ≥ 0. För att ekvationen ska ha två rötter, lika eller olika, krävs också att $1 - \sqrt{a} \geq 0$, dvs att $0 \leq a \leq 1$. För att rötterna ska vara olika måste dessutom $\sqrt{a} \neq 1 - \sqrt{a}$, vilket betyder att $a \neq 1/4$.

Svar: $0 \leq a < 1/4$ och $1/4 < a \leq 1$.

4. Vi antar att Anna anländer till Nyköpingsbro a minuter efter 12.30. Det betyder att Anna, från det att hon passerat Bertil, behöver $30 + a$ minuter fram till N, medan Bertil behöver $35 + a$ minuter. Från det att Bertil passerat Cilla behöver den förre $5 + a$ minuter och den senare $10 + a$ minuter för att ta sig till N. Slutligen kör Anna på 10 minuter samma sträcka som för Cilla tar 15 minuter.

   Om Anna, Bertil och Cilla kör med resp. hastigheter v_A, v_B och v_C gäller det följaktligen att $v_A/v_B = (35 + a)/(30 + a)$, $v_B/v_C = (10 + a)/(5 + a)$ och $v_C/v_A = 10/15$. Produkten av dessa tre kvoter är lika med 1, vilket ger ekvationen

$$\frac{35+a}{30+a} \cdot \frac{10+a}{5+a} \cdot \frac{10}{15} = 1, \text{ som förenklas till}$$

$$a^2 + 15a - 250 = 0,$$

   med den enda positiva lösningen $a = 10$.

   Det innebär att Anna på 40 minuter kör lika lång sträcka som för Bertil tar 45 minuter. Om Bertil finge 5 minuters försprång skulle Anna alltså hinna upp honom på 40 minuter. Eftersom försprånget i detta fall är 10 minuter tar det 80 minuter för Anna att hinna ifatt Bertil. Men Anna anländer till rastplatsen kl 12.40 och ger sig därifrån kl 12.55. Klockan är följaktligen 14.15 när hon hinner upp Bertil.

   SVAR: Anna hinner upp Bertil kl 14.15.

5. I varje följd av 18 konsekutiva tal finns det precis två som är delbara med 9, varav ett är jämnt och således delbart med 18.

   Varje tal, vars siffersumma är delbar med 9, är självt delbart med 9 och omvänt. För tresiffriga tal inses detta på följande sätt. Om talet är abc (dvs består av siffrorna a, b, c i denna ordning) kan det skrivas $100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c)$, vilket tydligen är delbart med 9 om och endast om siffersumman $a + b + c$ är delbar med 9. Speciellt är talet 999 delbart med sin siffersumma, 27, eftersom $999 = 27 \cdot 37$. Varje annat tresiffrigt tal har en siffersumma mellan 1 och 26. Om talet dessutom är delbart med 18 måste siffersumman vara 9 eller 18 och talet är alltså delbart med sin siffersumma. Påståendet är därmed visat.

6. Eftersom summan av radsummorna är lika med summan av kolumnsummorna måste S = summan av samtliga rad- och kolumnsummor vara delbar med 2. I det första fallet är hälften av de 3998 rad/kolumnsummorna, 1999 stycken, udda tal, varför också S måste vara udda. Följaktligen är inte problemet lösbart i det första fallet.

   I det andra fallet fungerar summavillkoret, men vi måste kontrollera att det går att placera ut talen 0, 1, 2 på önskat sätt.

   Låt oss beteckna rutan i rad a och kolumn b med (a, b). Vi placerar talet 1 i ruta $(1, 1)$ och fyller resten av rad nr 1 med 0:or, rad nr 2000 med idel 2:or, resten av kolumn nr 1 med 2:or och resten av kolumn nr 2000 med 0:or. Vi har nu förbrukat summorna 1, 2, 3999 och 4000. I alla övriga rader och kolumner finns nu en 2:a utplacerad.

   Om vi stryker rad 1, rad 2000, kolumn 1 och kolumn 2000 återstår ett rutnät med 1998 rader och 1998 kolumner, där vi ska bilda summorna $1, 2, \ldots, 3996$ (motsvarar summorna $3, 4, \ldots, 3998$ i det ursprungliga rutnätet). I det nya rutnätet fyller vi första och sista raden, första och sista kolumnen enligt mönstret, stryker sedan nämnda rader och kolumner och får ett ytterligare reducerat rutnät.

   Efter att ha upprepat proceduren så långt det går får vi som slutresultat enbart 1:or i övre hälften av huvuddiagonalen, dvs i rutorna $(1, 1)$, $(2, 2)$,…, $(1000, 1000)$, och enbart 2:or i resten av diagonalen. I rutorna ovanför diagonalen får vi idel 0:or; i rutorna under diagonalen får vi idel 2:or.

   SVAR: Det första fallet är inte lösbart, det andra är lösbart.