SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 1 oktober 2003

Lösningar (flera andra alternativ finns)

1. Eftersom Petra har en sedel av varje valör måste hon ha exakt en 500-kronorssedel. Hon har alltså sammanlagt 500 kr i övriga valörer. Låt a, b och c vara resp antalet 20-, 50- och 100-kronorssedlar. Vi får ekvationen

$$20a + 50b + 100c = 500,$$

där a, b och c alla är ≥ 1. Vidare är $b > a$. Eftersom tre av koefficienterna är delbara med 50 måste också den fjärde vara det, dvs vi har $a = 5k$ för något heltal k. Följaktligen är $b \geq 6$. Vi har alltså

$$100k + 50b + 100c = 500,$$

med $k \geq 1$, $b \geq 6$ och $c \geq 1$. Men insättning av angivna undre gränser i vänsterledet, $k = 1$ (som motsvarar $a = 5$), $b = 6$ och $c = 1$, ger just summan 500, vilket betyder att nämnda värden på k, b och c entydigt löser ekvationssystemet.

Svar: Petra har fem sedlar av valören 20, sex sedlar av valören 50, en sedel av valören 100 och en sedel av valören 500 kr, vilket tillsammans ger 13 sedlar.

2. Eftersom summan av de elva talen är udda måste talsummorna i de båda grupperna vara olika. Om den mindre gruppsumman är a ska sålunda den större gruppsumman vara ka för något positivt tal $k \geq 2$. Det betyder att summan av de elva talen har formen (k+1)a, dvs den mindre gruppsumman är en delare till den totala summan.
Denna är $413 = 7 \cdot 59$, varför a är lika med 7 eller 59. Men summan 7 kan inte bildas av givna tal, så $a = 59$. Inget av de elva talen är dock lika med 59. Eftersom alla tal är udda krävs minst tre termer för att summan ska bli den sökta.
Vi ser att $17 + 19 + 23 = 59$ medan alla andra grupper med minst tre tal ger en summa som överstiger 59. Enda möjliga lösning är att talen 17, 19 och 23 bildar den ena gruppen och övriga åtta tal den andra. I den senare gruppen är talens summa lika med $413 - 59 = 354$.

Svar: Den ena gruppen består av talen 17, 19 och 23 med summan 59, medan den andra gruppen består av talen 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 och 73 med summan $354 = 6 \cdot 59$.

3. Först noterar vi att ekvationen inte är definierad för $x \neq \pm 1$. För att rotuttrycken ska vara väldefinierade krävs att $x + 1$ och $x - 1$ har samma tecken. I fallet att båda är positiva sätter vi $a = \sqrt{x+1}$ och $b = \sqrt{x-1}$. Vi får ekvationen

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{4}{a^2},$$

som kan skrivas

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{4}{a^2}.$$

Men $a^2 - b^2 = (x+1) - (x-1) = 2$, så ekvationen kan förenklas till

$$\frac{2}{ab} = \frac{4}{a^2},$$

varav $a = 2b$, dvs $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1}$. Kvadrering ger $x+1 = 4(x-1)$ med lösningen $x = \frac{5}{3}$. Insättning visar att detta bråktal också är en lösning till den ursprungliga ekvationen.

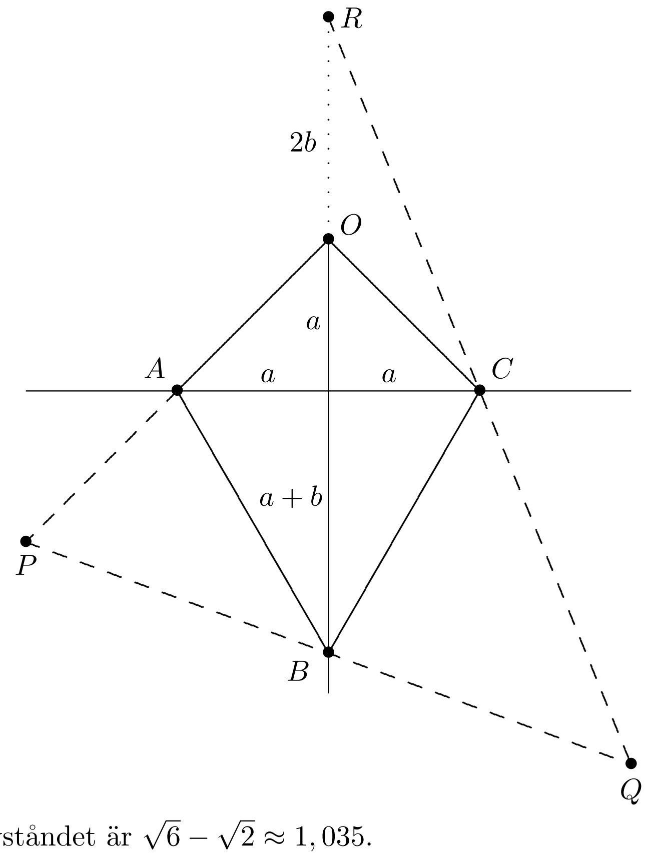
I fallet att $x+1$ och $x-1$ båda är negativa sätter vi i stället $a = \sqrt{-(x+1)}$ och $b = \sqrt{-(x-1)}$. Med samma förfarande som ovan kommer vi fram till ekvationerna

$$\frac{-2}{ab} = \frac{4}{-a^2} \text{ och } \sqrt{-(x+1)} = 2\sqrt{-(x-1)},$$

som efter kvadrering ger samma rot som ovan, nämligen $x = \frac{5}{3}$.

Svar: Entydig lösning är $x = \frac{5}{3}$.

4. Låt oss placera triangeln ABC i ett rätvinkligt koordinatsystem med A i punkten $(-a, 0)$, C i punkten $(a, 0)$ och B i en punkt med koordinaterna $(0, -a-b)$. Här är a bestämt av att sidan AC har längden $\sqrt{2}$, dvs $a = \sqrt{2}/2$ och eftersom $a+b$ uttrycker höjden mot sidan AC i den liksidiga triangeln ACB blir $a+b = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}/2$ och således $b = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/2$.
Myran startar i punkten O med koordinaterna $(0, a)$. Eftersom A är medelpunkt på sträckan OP får punkten P koordinaterna $(-2a, -a)$. Då vidare punkten B är medelpunkt på sträckan PQ får punkten Q koordinaterna $(2a, -a-2b)$. På samma sätt är punkten C medelpunkt på sträckan QR och vi finner att punkten R har koordinaterna $(0, a+2b)$. Avståndet till punkten O med koordinaterna $(0, a)$ är följaktligen $2b = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035$.



Svar: Avståndet är $\sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035$.

5. De 2003 brickorna länkas samman till en sammanhängande kedja av månghörningens sidor. Kedjan kan delas upp i delkedjor eller sviter av brickor av samma färg (somliga sviter kan därvid bestå av en enda bricka). Om samtliga brickor från början visar samma färg är ju målet redan uppfyllt, så vi antar att det förekommer såväl blå som röda sviter.

   Eftersom varje blå svit följs av en röd svit, när vi vandrar runt månghörningen, måste antalet blå sviter vara lika med antalet röda, dvs vi har ett jämnt antal sviter. Men då det totala antalet brickor är udda kan inte alla sviter bestå av ett udda antal brickor. Så länge det finns minst två sviter finns det således minst en svit med ett jämnt antal brickor. Låt oss utföra operationen på brickor i en sådan svit.

   Om det endast finns två sviter, en röd och en blå, måste den ena innehålla ett jämnt antal brickor. Vi kan då vända på brickorna i denna svit genom att utföra operationen på två brickor i taget, varefter samtliga 2003 brickor visar samma färg.

   Antag nu att det finns minst fyra sviter, dvs åtminstone två röda och två blå. Minst en av sviterna måste innehålla ett jämnt antal brickor. Om exempelvis alla brickorna i en sådan svit är röda, är den omgiven av två sviter med idel blå brickor. Om nu samtliga brickor i den röda delsviten vänds genom att vi utför operationen för två brickor i taget, får vi av den röda sviten och de omgivande blå sviterna en enda blå svit. Antalet sviter har således minskat med 2. Men så länge båda färgerna är representerade finns det alltid en svit med jämnt antal brickor och vi kan hela tiden reducera antalet sviter med 2, utom i fallet med två sviter som kan reduceras till en enda.

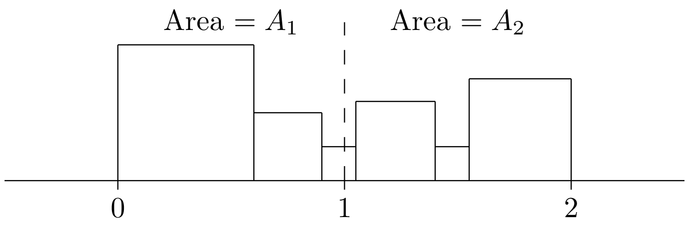
   Då antalet sviter från början är begränsat, högst 2002, kommer vi efter ett ändligt antal operationer att ha reducerat antalet sviter till en enda, vilket visar att vi kan nå målet oavsett hur färgerna är fördelade från början.

6. *Lösning 1 (insänd av Anders Lönn, Sandvikens Gymnasieskola).* Den sammanlagda arean av alla kvadrater antogs vara större än 1. Vi måste ha minst fyra kvadrater, då påståendet i texten uppenbarligen är sant för två eller tre kvadrater.

   Vi antar vidare att hos alla kvadrater är sidlängden mindre än 1, ty annars är påståendet trivialt sant.

   Placera ut kvadraterna så att den största kvadraten ligger längst till vänster i intervallet $[0, 2]$ och så att den näst största (ev är de två största kvadraterna lika stora) ligger längst till höger i samma intervall. Övriga kvadrater placeras ut godtyckligt i intervallet mellan de båda förstnämnda. Ev kan någon kvadrat täcka mittpunkten 1 på intervallet $[0, 2]$. Låt arean av kvadraterna i intervallet $[0, 1]$ vara A_1 och arean av kvadraterna i intervallet $[1, 2]$ vara A_2. (Om någon kvadrat täcker mittpunkten 1, ingår delarean till vänster därom i A_1 och tillhöger därom i A_2.)

   Den största kvadratens sida (och lika med dess höjd) är då $\geq A_1$, medan den näst största kvadratens sida är $\geq A_2$. Summan av de två största kvadraternas sidor är följaktligen $\geq A_1 + A_2$ som ju är större än 1. Därmed är påståendet visat.



Lösning 2. För $n = 2$ är påståendet uppenbart sant. Om $n = 3$ kan inte det minsta delintervallets längd överstiga totala intervallängden dividerad med 3, dvs kan inte

överstiga $\frac{2}{3}$ och följaktligen måste de två bredaste intervallen ha en sammanlagd längd som är minst lika med $\frac{4}{3}$.

Antag för $n \geq 4$ att delintervallens längder är ordnade i avtagande ordning: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$. Antag att $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 1$. Vi ska visa att då måste $x_1 + x_2 > 1$. Om $x_1 \geq 1$ är säkert $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 1$ och påståendet är förstås sant. Antag därför att $x_1 < 1$. Då gäller, eftersom $x_i \leq x_2$ för $i = 3, 4, \ldots, n$, att

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 &\leq x_1^2 + x_2^2 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n \\ &= x_1^2 + x_2(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = x_1^2 + x_2(2 - x_1) \end{aligned}$$

Om vi kan visa att detta är $\leq x_1 + x_2$ så är det hela klart. Vi ska alltså visa att

$$x_1^2 + x_2(1 - x_1) \leq x_1 \text{ eller } (x_1 - x_2)(1 - x_1) \geq 0.$$

Men detta är uppfyllt under de givna förutsättningarna, då $x_2 \leq x_1 \leq 1$.