Den 19:e Nordiska Matematiktävlingen

Tisdagen den 5 april, 2005

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng.

Problem 1

Bestäm alla positiva heltal k, sådana att produkten av siffrorna i k (i tiotalssystemet) är lika med

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

Problem 2

Låt a, b och c vara positiva reella tal. Visa att

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a + b + c.$$

Problem 3

Kring ett mycket stort, runt bord sitter 2005 ungdomar. Högst 668 av dem är pojkar. Vi säger att en flicka, G, har en stark position om, vid räkning från G ett godtyckligt antal steg oavsett riktning, antalet flickor alltid är strikt större än antalet pojkar. (G är själv inkluderad vid räkningen.) Visa att det alltid finns en flicka som har en stark position, hur ungdomarna än är placerade kring bordet.

Problem 4

Cirkeln $\mathcal{C}_1$ är belägen inuti cirkeln $\mathcal{C}_2$, och cirklarna tangerar varandra i punkten A. En linje som går genom A skär cirkeln $\mathcal{C}_1$ även i punkten B och cirkeln $\mathcal{C}_2$ även i punkten C. Tangenten till $\mathcal{C}_1$ i punkten B skär $\mathcal{C}_2$ i D och E. Tangenterna till $\mathcal{C}_1$ som går genom C tangerar $\mathcal{C}_1$ i F och G. Visa att D, E, F och G är punkter på samma cirkel.

Enda tillåtna hjälpmedel är skrivdon och linjal.