Lösningsförslag till NMC 2011

Problem 1

Om a_0, a_1, ..., a_{1000} betecknar siffror, kan summan av de båda 1001-siffriga talen $a_0a_1 \dots a_{1000}$ och $a_{1000}a_{999} \dots a_0$ bestå av enbart udda siffror?

Lösning. Svaret är nej.

Följande diagram illustrerar beräkningen av summan, siffra för siffra.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & a_0 & a_1 & \dots & a_i & \dots & a_{500} & \dots & a_{1000-i} & \dots & a_{998} & a_{999} & a_{1000} \\
 & a_{1000} & a_{999} & \dots & a_{1000-i} & \dots & a_{500} & \dots & a_i & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
s_{1001} & s_{1000} & s_{999} & \dots & s_{1000-i} & \dots & s_{500} & \dots & s_i & \dots & s_2 & s_1 & s_0
\end{array}$$

Talen s_i utgör således siffrorna i summan. Siffran s_{1001} utgår eventuellt. *Om* den förekommer är den lika med 1. Kolumnen med siffran s_i betecknar vi med i.

Antag att s_i är udda för $i = 0, 1, \dots, 1000$. Med induktion över i visar vi att $a_{2i} + a_{1000-2i}$ är udda för $i = 0, 1, \dots, 250$, dvs för kolumner med jämna nummer. Men detta gäller då också för kolumn nr 500, dvs vi har $a_{2\cdot250} + a_{1000-2\cdot250} = 2a_{500}$ udda, vilket innebär en motsägelse.

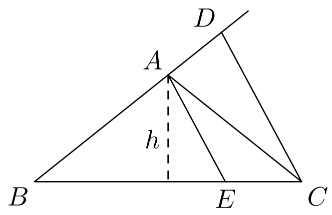
Beviset är som följer: Eftersom s_0 är udda, är a_0+a_{1000} udda, så påståendet är sant för $i = 0$. Antag att $a_{2i}+a_{1000-2i}$ är udda för något $i = 0, 1, \dots 249$, dvs för någon kolumn i den högra halvan med jämnt nummer $2i$. Om vi nu betraktar kolumn nr $1000 - 2i$ i den vänstra halvan gäller att $s_{1000-2i}$ är udda och eftersom $a_{2i} + a_{1000-2i}$ är udda så finns det ingen minnessiffra i denna kolumn, varför summan i kolumnen omedelbart till höger därom, $a_{2i+1} + a_{1000-(2i+1)}$, måste vara ≤ 9. Men då gäller, eftersom s_{2i+1} är udda och $a_{2i+1} + a_{1000-(2i+1)} \leq 9$, att det inte finns någon minnessiffra i kolumn $2i + 2$. Härav följer att $a_{2i+2} + a_{1000-(2i+2)}$ är udda eftersom s_{2i+2} är udda. Därmed är induktionssteget avklarat.

Problem 2

I en triangel ABC antas $AB = AC$. Låt D vara en punkt på förlängningen av sträckan BA bortom A och E en punkt på sträckan BC, så att linjerna CD och AE är parallella. Visa olikheten

$$CD \geq \frac{4h}{BC} CE,$$ där h är höjden från A i triangeln ABC. När gäller likhet?

Lösning. Eftersom $AE \parallel CD$ får vi att $CD/AE = BC/BE$, varav



$$CD = \frac{AE \cdot BC}{BE} = \frac{AE \cdot BC}{BE \cdot CE} CE\,. \qquad (1)$$

Eftersom h är det kortaste avståndet från A till linjen BC gäller att $AE \geq h$ med likhet om och endast om E är fotpunkten till höjden, Men eftersom $AB = AC$ är E i så fall mittpunkten på sidan BC.

Vidare gäller att $BE{\cdot}CE \leq ((BE{+}CE)/2)^2 = (BC/2)^2$ med likhet om och endast om $BE = CE$ (om en sträcka av given längd uppdelas i två delsträckor så är produkten av delsträckorna maximal då delsträckorna är lika långa). Detta är ekvivalent med att E än en gång är mittpunkten på BC.

Om vi kombinerar dessa båda resultat får vi från (1) den önskade olikheten med likhet om och endast om E är mittpunkten på BC.

Problem 3

Finn alla funktioner f sådana att

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

för alla reella tal x och y.

Lösning. Genom att sätta $y = x^2$ får vi $f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2 f(x)$ för alla reella x. Insättning av $y = -f(x)$ ger $f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2$ för alla x. Kombinerar vi dessa båda ekvationer får vi $4f(x)^2 = 4x^4 f(x)$ så för varje x gäller antingen $f(x) = 0$ eller $f(x) = x^2$. Speciellt har vi $f(0) = 0$. Låt oss undersöka om dessa båda funktioner uppträder enbart var för sig eller i kombinationer av båda. I första fallet är således $f(x) = 0$ för alla x eller också är $f(x) = x^2$ för alla x.

Antag att det existerar ett reellt tal $a \neq 0$ sådant att $f(a) \neq 0$. Om $f(x) = 0$ för något $x \neq a$ gäller det att

$0 \equiv f(x) = f(f(a) + (x - f(a))) = f(a^2 - (x - f(a)) + 4(x - f(a))f(a)$ (i sambandet $f(f(t) + y) = f(t^2 - y) + 4yf(t)$ har vi satt $t = a$ och $y = x - f(a)$). Eftersom $f(a) = a^2$ får vi

$0 = f(2a^2 - x) + 4(x - a^2)a^2$. Om $x \neq a^2$, är den sista termen $\neq 0$, och då är också $f(2a^2 - x) \neq 0$, dvs vi har $(2a^2 - x)^2 + 4(x - a^2)a^2 = x^2$. Det betyder att om $f(x) = 0$ för något $x \neq 0$, dvs om $f(x) = 0$ är antingen $x = 0$ eller $x = a^2$. Genom att ersätta a med $-2|a|$ ska vi dock visa att $x = a^2$ inte kan gälla. (Notera att vi använder ett negativt uttryck i a; med exempelvis $2a$ skulle vi få $2a = a^2$ för $a = 2$.) Vi genomför samma resonemang som tidigare och får

$0 \equiv f(x) = f\big(f(-2|a|) + (x - f(-2|a|))\big) = f\big((-2|a|)^2 - (x - f(-2|a|)\big)$ $+4(x - f(-2|a|))f(-2|a|)$. Vi har här använt att $f(-2|a|) \neq 0$, eftersom $(-2|a|) \neq a$. Det följer att

$0 \equiv f(x) = f(a^2 - (x - 4a^2) + 4(x - 4a^2)a^2 = x^2$, och vi finner att om $f(x) = 0$ är den enda möjligheten att $x = 0$.

Så antingen är $f(x) = 0$ för alla x eller $f(x) = x^2$ för alla x. Det är lätt att kontrollera att dessa två funktioner verkligen är lösningar till den givna ekvationen.

Alternativ lösning. På samma sätt som tidigare gäller för varje x att $f(x) = 0$ eller $f(x) = x^2$. Om $f(x) = 0$ för något x, kan villkoret i uppgiften skrivas som $f(y) = f(x^2 - y)$. Speciellt gäller $f(y) = f(-y)$, varför vi också har sambandet $f(y) = f(x^2 + y)$. Om $f(y) \neq 0$ för något y, måste både $f(x^2 - y)$ och $f(x^2 + y)$ vara skilda från 0, dvs vi har dels $y^2 = (x^2 - y)^2$, dels $y^2 = (x^2 + y)$. Summering av de båda ekvationerna ger $2x^4 = 0$, dvs $x = 0$. Detta innebär att om $f(y) \neq 0$ för något y, så medför $f(x) = 0$ att $x = 0$ och slutsatsen blir densamma som tidigare.

Problem 4

Visa att det för varje heltal $n \geq 2$ gäller att summan av bråktalen $\dfrac{1}{ab}$, där a och b är relativt prima positiva heltal sådana att $a < b \leq n$ och $a + b > n$, är lika med $\dfrac{1}{2}$.
Anm. Två heltal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensam delare > 1.

Lösning. Vi visar detta med induktion. Vi observerar först att påståendet gäller för $n = 2$ eftersom $a = 1$ och $b = 2$ är de enda talen som uppfyller villkoren. Därefter visar vi att om n ökar med 1 så förändras inte summan, så den är fortfarande lika med $1/2$. För att klara detta räcker det att visa att summan av termerna som tas bort är lika med summan av de nya termer som läggs till. Alla termerna i summan för $n-1$ finns kvar i summan för n med undantag av de bråktal $1/ab$ för vilka a och b är relativt prima och som uppfyller $0 < a < b \leq n$ och $a + b = n$. Å andra sidan är de nya termer som läggs till summan för n på formen $1/an$ (dvs $b = n$) med $0 < a < n$. Det räcker således att visa

$$\sum_{\substack{0<a<n/2 \\ \gcd(a,n-a)=1}} \frac{1}{a(n-a)} = \sum_{\substack{0<a<n \\ \gcd(a,n)=1}} \frac{1}{an},$$

där vänsterledet anger summan av de bråktal som tas bort och högerledet de bråktal som läggs till när man övergår från $n - 1$ till n.

Vi noterar att varje term i vänsterledet på formen $\dfrac{1}{a(n-a)}$ kan skrivas som summan av två termer i högerledet, $\dfrac{1}{an}$ och $\dfrac{1}{(n-a)n}$. Det gäller nämligen att

$$\frac{1}{an}+\frac{1}{(n-a)n}=\frac{(n-a)+a}{a(n-a)n}=\frac{1}{a(n-a)},$$

där vi utnyttjar att $\gcd(a,n)=\gcd(n-a,n)$, vilket betyder att antingen ingår båda termerna i summan eller ingen av dem.

Ingen term utelämnas, ty om n är jämnt och större än 2 så gäller att $\gcd(n/2,n) = n/2 > 1$. Högerledet ges följaktligen av

$$\sum_{\substack{0<a<n \\ \gcd(a,n)=1}} \frac{1}{an} = \sum_{\substack{0<a<n/2 \\ \gcd(a,n)=1}} \frac{1}{a(n-a)} = \sum_{\substack{0<a<n/2 \\ \gcd(a,n-a)=1}} \frac{1}{a(n-a)},$$

vilket var just det vi ville visa.

Anm. Ovanstående lösningar följer i stort de officiella lösningar som utarbetats av de danska arrangörerna. För ytterligare detaljer kring tävlingen, se hemsidan för Georg Mohr-Konkurrencen som är den danska motsvarigheten till Skolornas matematiktävling: *www.georgmohr.dk*