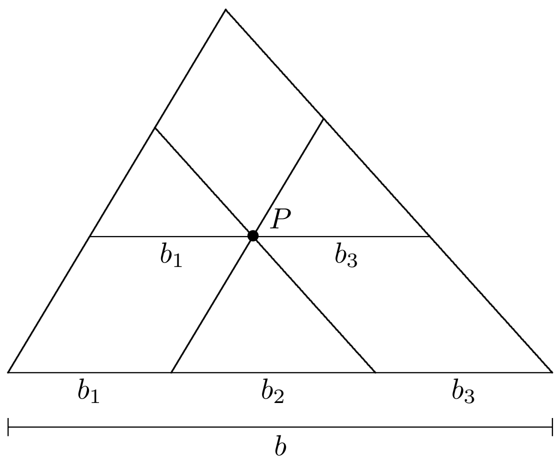
Lösningsförslag till NMC 2009

Problem 1. I en godtycklig triangel väljs en punkt, P. Genom P dras tre linjer, parallella med triangelns sidor. Linjerna delar triangeln i tre mindre trianglar och tre parallellogrammer. Låt f vara kvoten mellan den sammanlagda arean av de tre mindre trianglarna och arean av den givna triangeln. Visa att $f \geq \frac{1}{3}$ och bestäm de punkter P för vilka $f = \frac{1}{3}$.

Lösning. Eftersom de mindre trianglarnas sidor är parallella med motsvarande sidor i den större triangeln är trianglarna likformiga med varandra. Sidorna i var och en av de mindre trianglarna är proportionella mot motsvarande sidor i den större triangeln. Längden av en sida i den i :e av de mindre trianglarna kan därför skrivas som längden av motsvarande sida i den större triangeln multiplicerad med en konstant, en *skalfaktor*, k_i säg. Låt b vara längden av en godtycklig sida i den ursprungliga triangeln och låt motsvarande mätetal i de tre mindre trianglarna vara resp b_1, b_2, b_3, där således $b_1 = k_1 \cdot b$, $b_2 = k_2 \cdot b$, $b_3 = k_3 \cdot b$.



Eftersom parallella sidor i en parallellogram är lika långa ser vi från figuren att $b = b_1 + b_2 + b_3$, och alltså lika med $k_1 \cdot b + k_2 \cdot b + k_3 \cdot b = (k_1 + k_2 + k_3)\, b$, varav det följer att $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Eftersom areaskalan är lika med kvadraten på längdskalan, gäller det att arean av den i :e mindre triangeln förhåller sig till arean av den större triangeln som $(\frac{b_i}{b})^2 = k_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Således är $f = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Vi ska visa att $f \geq \frac{1}{3}$, dvs att $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \geq \frac{1}{3}$, där k_1, k_2, k_3 är positiva tal som uppfyller $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Vi använder oss av följande resultat.

Hjälpsats: Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara godtyckliga reella tal. Det gäller då att

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

Anm. Olikheten kan alternativt skrivas som

$$\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geq \Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\Big)^2,$$

vilket innebär att medelvärdet av talens kvadrater alltid är större än eller lika med kvadraten på medelvärdet av talen.

Bevis: Låt $\bar{x}$ beteckna det aritmetiska medelvärdet av de n talen, dvs $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Bilda kvadratsumman $Q = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$, som kan utvecklas till

$$\begin{aligned}Q =&(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2\bar{x}(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n\bar{x}^2\\ =&(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\\ =&(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)-\tfrac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\end{aligned}$$

och olikheten följer, eftersom $Q \geq 0$ för alla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Likhet gäller om och endast om $x_i = \bar{x}$ för alla i. Med $n = 3$ och $x_i = k_i$ för $i = 1, 2, 3$ har vi

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2 \geq \frac{1}{3}(k_1+k_2+k_3)^2 = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Likhet gäller om och endast om $k_i = \bar{k} = \frac{1}{3}$ för $i = 1, 2, 3$, dvs om och endast om $b_1 = b_2 = b_3 = \frac{b}{3}$.

Anm. De som är förtrogna med statistisk teori bör känna igen de olika formerna av kvadratsumman Q. Variansen s^2 i stickprovet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är nämligen lika med $\frac{1}{n-1}Q$. De som inte har sysslat med statistik kan studera följande bevis.

Alternativt bevis av olikheten (1):

$$\begin{aligned}&k_1^2+k_2^2+k_3^2 \geq \tfrac{1}{3}(k_1+k_2+k_3)^2\\ \iff\ &3(k_1^2+k_2^2+k_3^2) \geq (k_1+k_2+k_3)^2\\ \iff\ &2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)-2(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1) \geq 0\\ \iff\ &(k_1-k_2)^2+(k_2-k_3)^2+(k_3-k_1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

där den sista olikheten uppenbarligen gäller. Vi har likhet om och endast om $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$.

Fallet $f = \frac{1}{3}$. Låt M vara mittpunkten på sidan med längden b_2 i en av de mindre trianglarna. Eftersom $b_1 = b_3$ är M också mittpunkten på sidan med längden b i den större triangeln. Multiplikation med faktorn 3 med utgångspunkt i M överför nämnda mindre triangel i den större triangeln (eftersom de två trianglarna är likformiga och sidan med längden b_2 övergår i sidan med längden b). Således är PM en median i den mindre triangeln och det följer att P ligger på en median i den större triangeln, och då P övergår i ett hörn i den större triangeln vid multiplikation med 3 från M räknat, drar vi slutsatsen att P är skärningspunkten till medianerna i denna triangel (medianerna i en godtycklig triangel skär varandra i en punkt som delar varje median i förhållandet 2 : 1 från resp hörn räknat).

Svar. Vi har likhet om och endast om $b_1 = b_2 = b_3 = \frac{1}{3}b$, vilket inträffar om och endast om P är skärningspunkten för medianerna i triangeln.

Problem 2. På ett gulnat papper kan man med viss möda urskilja resterna av en polynommultiplikation:

$$(x^2+x+a)(x^{15}-\ldots) \;=\; x^{17}+x^{13}+x^5-90x^4+x-90.$$

Vissa delar har gått förlorade, dels konstanttermen i den första faktorn i vänsterledet, dels större delen av den andra faktorn. Det skulle vara möjligt att restaurera polynomet som utgör den andra faktorn, men vi nöjer oss här med att ställa frågan: Vilket värde har konstanttermen a? Vi förutsätter att alla förekommande polynom har enbart heltalskoefficienter.

Lösning. Vi betecknar polynomet $x^2 + x + a$ med $P_a(x)$, polynomet som bildar den andra faktorn i vänsterledet med $Q(x)$ och polynomet i högerledet med $R(x)$. Polynomen antar heltalsvärden för varje heltal x. För $x = 0$ får vi $P_a(0) = a$ och $R(0) = -90$, så a är en delare till $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. För $x = -1$ får vi $P_a(-1) = a$ och $R(-1) = -184$, så a är också en delare till $184 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$. Men den enda gemensamma primfaktorn till 90 och 184 är 2, varför de enda möjligheterna för a är ± 2 och ± 1. Om $a = 1$ får vi för $x = 1$ att $P_1(1) = 3$, medan $R(1) = -176$ vilket inte är jämnt delbart med 3. Om $a = -2$ får vi för $x = 1$ att $P_{-2}(1) = 0$, dvs vänsterledet är lika med 0, medan högerledet är lika med $R(1) = -176$ och skilt från 0. Varken $a = 1$ eller $a = -2$ är således möjligt. Det återstår att undersöka $a = 2$ och $a = -1$.

Innan vi använder nämnda procedur igen kan vi ha nytta av att faktorisera $R(x)$. Vi kunde naturligtvis ha faktoriserat $R(x)$ från början, men i så fall hade vi behövt studera de faktorer som $R(x)$ gett upphov till. Vi observerar att $x^4 + 1$ är en delare till $R(x)$, eftersom detta polynom kan skrivas som $(x^4+1)(x^{13}+x-90)$. Om $a = -1$ får vi för $x = 2$ att $P_{-1}(2) = 5$, medan $x^4 + 1 = 17$ and $x^{13} + x - 90 = 8104$, men där ingen av faktorerna är delbar med 5. Således är den enda återstående möjligheten att $a = 2$, dvs att $x^2 + x + 2$ är en delare till $R(x)$.

Anm. Man kan visa att $Q(x) = (x^4 + 1)(x^{11} - x^{10} - x^9 + 3x^8 - x^7 - 5x^6 + 7x^5 + 3x^4 - 17x^3 + 11x^2 + 23x - 45)$.

Svar: $a = 2$

Problem 3. Heltalen 1, 2, 3, 4 och 5 står skrivna på en tavla. Det är tillåtet att sudda ut två tal a och b och ersätta dem med talen $a + b$ och ab. Är det möjligt, genom att upprepa denna procedur, att komma fram till en situation där tre av de fem heltalen på tavlan är lika med 2009?

Lösning. Svaret är nej. Först noterar vi att i varje drag ersätts två heltal med två större heltal, utom i fallet när talet 1 suddas ut. Vi observerar vidare att vi startar med tre udda och två jämna tal och försöker komma till en situation med minst tre udda tal. Om vi ersätter två udda tal kommer antalet udda tal på tavlan att minska med 1. Om vi ersätter två jämna tal eller två tal med olika paritet kommer antalet udda tal på tavlan att vara oförändrat. För att kunna få tre tal som alla är lika med 2009 är det alltså inte tillåtet att någon gång ersätta två udda tal. Talet 2009 kan vi därför bara få som summan $a + b$, inte som produkten ab, när vi suddat ut a och b.

För att få talet 2009 för första gången, måste vi välja två tal a och b som är sådana att $a + b = 2009$ och där $ab > 2009$ eller $ab = 2008$. I fallet $ab = 2008$, är en av faktorerna lika med 1, och talet 1 finns då inte längre kvar på tavlan. De två heltalen $a+b = 2009$ och ab som uppstår första gången som talet 2009 skapas kan således inte i något av fallen användas vid bildandet av de återstående två talen 2009. För att bilda nästa tal 2009 är detta endast möjligt om man väljer sådana tal c och d på tavlan att $c + d = 2009$ och $cd > 2009$ (om vi inte använde talet 1 till det första talet 2009) eller $cd = 2008$, och i det sistnämnda fallet kommer talet 1 inte längre att finnas med på tavlan i fortsättningen. Talen $c + d = 2009$ och cd kan i ingendera fallet användas vid skapandet av ett tredje tal 2009, eftersom fyra av talen redan är ”förbrukade”. Följaktligen är det inte möjligt att bilda ett tredje tal 2009 överhuvudtaget.

Svar: Nej, det är inte möjligt.

Problem 4. En turnering har 32 deltagare. Det går inte att hitta två tävlande med samma spelstyrka och vid inbördes möten är det alltid den starkare som vinner. Visa att 39 matcher räcker för att fastställa guld-, silver- och bronsmedaljvinnarna.

Lösning. Antag mera allmänt att 2^n personer deltar i turneringen och låt oss dela in dem i 2^{n-1} par för inbördes matcher. Segrarna i denna första omgång indelas i sin tur i 2^{n-2} par för en andra omgång av matcher. Proceduren fortgår på samma sätt, där segrarna hela tiden går vidare, till och med omgång n då bara två spelare återstår. Vinnaren i denna match måste vara guldmedaljören, eftersom alla de övriga spelarna har förlorat (exakt) en match var. Totala antalet matcher måste därför vara lika med antalet förlorande spelare, eller $2^n - 1$. För $n = 5$ krävs följaktligen 31 matcher för att hitta guldmedaljören. I fortsättningen betecknar vi denna med G.

Silvermedaljören, i fortsättningen betecknad med S, kan bara ha förlorat mot G, dvs så länge som hon har mött andra spelare har hon fortsatt som segrare fram till det oundvikliga mötet med G. Spelaren S måste således ha mött G i någon av de n omgångarna. Låt de n motståndarna till G i tur och ordning vara $C_1, C_2, \ldots, C_n$. För att bestämma vem av dem som är S låter vi C_1 spela mot C_2 varefter segraren möter C_3. Segraren i den matchen möter C_4 och vi fortsätter på detta sätt tills vi har hittat den bäste, som då måste vara S. Eftersom $n-1$ av spelarna ska elimineras, krävs $n-1$ matcher för att kora vinnaren. För $n = 5$ behöver man alltså 4 matcher för att hitta silvermedaljören, dvs sammanlagt 31+4= 35 matcher för att kora ettan och tvåan i turneringen.

Det återstår nu att fastställa vem som är bronsmedaljör, här betecknad med B. Denna kan ha förlorat mot G, mot S eller mot båda. Det sista fallet kan inträffa om B i någon omgång spelade mot G och sedan mot S i en efterföljande utslagningsrond.

Antag att G mötte S i den första omgången. Då måste B ha vunnit mot någon annan spelare i den första omgången och sedan gått vidare med vinster tills hon så småningom mötte G och blev besegrad. Eftersom S deltog i alla $n-1$ matcherna i den efterföljande utslagsronden, vet vi inte vem som är bäst av de övriga $n-1$ spelarna, varför vi måste genomföra en ny utslagsrond bland de återstående. Eftersom $S = C_1$ låter vi C_2 spela mot C_3, sedan får segraren möta C_4 osv tills vi har hittat den bäste, som då måste vara B. För detta krävs ytterligare $n-2$ matcher. Men vi ska se att $n-2$ inte är tillräckligt om G och S skulle ha mötts i en senare omgång.

Antag sålunda att G mötte S i omgång k, där $2 \leq k \leq n$. Om B varken mötte G eller S i någon av de $k-1$ första omgångarna, måste hon ha vunnit mot andra motståndare under de k första omgångarna och sedan mött G i någon av omgångarna $k+1, k+2, \ldots, n$. Någon av motståndarna till G i dessa omgångar, dvs någon bland spelarna $C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$ måste i detta fall vara B.

Om B i stället mötte G och S i någon av de $k-1$ första omgångarna (B kan inte ha mött båda, eftersom ett sådant möte innebär förlust och stopp för vidare spel), skulle B kunna vara någon av G :s motståndare i dessa omgångar, dvs $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ resp., eller någon av S :s motståndare i samma omgångar; dessa spelare betecknar vi med $D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}$ resp. Men i inledningen till utslagningsronden omfattande spelarna C_1, C_2, $\ldots, C_{k-1}$ vid sökandet efter S, förekom inte S (hon dök ju dök upp först i omgång nr k), dvs om B varit någon av de $k-1$ första motståndarna till G, måste hon i så fall ha varit slutsegraren i denna delrond av matcher (dvs bäst av spelarna $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$). Låt oss beteckna denna spelare med $C_{(k-1)}$.

I fallet att G mötte S i omgång k, $2 \leq k \leq n$, har vi därmed funnit att B måste vara någon av spelarna $D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, C_{(k-1)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$. För att hitta den bästa bland dessa n spelare krävs ytterligare en utslagningsrond omfattande $n-1$ matcher. För $n = 5$ behövs det alltså som mest ytterligare 4 matcher (utöver dem som åtgick vid bestämningen av G och S) och totalt behöver vi som mest $31 + 4 + 4 = 39$ matcher för att hitta de tre medaljörerna.