

# Den 25:e Nordiska Matematiktävlingen

Måndagen den 4 april 2011

Svensk version

*Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.*

## Problem 1

Om  $a_0, a_1, \dots, a_{1000}$  betecknar siffror, kan summan av de båda 1001-siffriga talen  $a_0a_1 \dots a_{1000}$  och  $a_{1000}a_{999} \dots a_0$  bestå av enbart udda siffror?

## Problem 2

I en triangel  $ABC$  antas  $AB = AC$ . Låt  $D$  vara en punkt på förlängningen av sträckan  $BA$  bortom  $A$  och  $E$  en punkt på sträckan  $BC$ , så att linjerna  $CD$  och  $AE$  är parallella. Visa olikheten

$$CD \geq \frac{4h}{BC} CE, \text{ där } h \text{ är höjden från } A \text{ i triangeln } ABC. \text{ När gäller likhet?}$$

## Problem 3

Finn alla funktioner  $f$  sådana att

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

för alla reella tal  $x$  och  $y$ .

## Problem 4

Visa att det för varje heltal  $n \geq 2$  gäller att summan av bråktalen  $\frac{1}{ab}$ , där  $a$  och  $b$  är relativt prima positiva heltal sådana att  $a < b \leq n$  och  $a + b > n$ , är lika med  $\frac{1}{2}$ .

*Anm.* Två heltal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensam delare  $> 1$ .