Den 25:e Nordiska Matematiktävlingen

Måndagen den 4 april 2011
Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

Om a_0, a_1, ..., a_{1000} betecknar siffror, kan summan av de båda 1001-siffriga talen $a_0a_1 \dots a_{1000}$ och $a_{1000}a_{999} \dots a_0$ bestå av enbart udda siffror?

Problem 2

I en triangel ABC antas $AB = AC$. Låt D vara en punkt på förlängningen av sträckan BA bortom A och E en punkt på sträckan BC, så att linjerna CD och AE är parallella. Visa olikheten

$CD \geq \dfrac{4h}{BC} CE$, där h är höjden från A i triangeln ABC. När gäller likhet?

Problem 3

Finn alla funktioner f sådana att

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 4

Visa att det för varje heltal $n \geq 2$ gäller att summan av bråktalen $\dfrac{1}{ab}$, där a och b är relativt prima positiva heltal sådana att $a < b \leq n$ och $a + b > n$, är lika med $\dfrac{1}{2}$.

Anm. Två heltal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensam delare > 1.