SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 24 november 2001

1 Vi noterar att alla talen i en rad eller en kolumn har en gemensam delare som är > 1. Den största gemensamma delaren till talen i var och en raderna 1, 2, 3, 4, 5, 6 är resp 2, 3, 5, 8, 9 och 10. Låt oss kalla dessa tal för radtal. Den största gemensamma delaren till talen i var och en av kolumnerna 1, 2, 3, 4, 5, 6 är resp 2, 3, 5, 7, 11 och 13. Låt oss kalla dessa tal för kolumntal. Vi konstaterar att alla tal i tabellen är produkten av radtalet och kolumntalet i aktuell rad och kolumn.

Produkten av sex tal valda ur tabellen kan följaktligen skrivas som en produkt av sex radtal och sex kolumntal. Om de sex talen är valda så att varje rad och varje kolumn är representerad, kommer varje radtal och varje kolumntal att förekomma exakt en gång. Produkten är därför alltid lika med produkten av radtalen gånger produkten av kolumntalen, eller $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13) = 648\,648\,000$.

2. Vi söker $a - b$, där $a = \sqrt[3]{\sqrt{52} + 5}$ och $b = \sqrt[3]{\sqrt{52} - 5}$. Bl a gäller

$$a^3 = \sqrt{52} + 5$$

och

$$b^3 = \sqrt{52} - 5,$$

som är två av termerna i utvecklingen av $(a - b)^3$:

$$(1) \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a-b) = 10 - 3ab(a-b).$$

Men

$$ab = \sqrt[3]{(\sqrt{52}+5)(\sqrt{52}-5)} = \sqrt[3]{52-25} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Med $x = a - b$ får vi ur (1) sambandet

$$(2) \qquad x^3 = 10 - 9x.$$

Vi ser att $x = 1$ är en rot till ekvationen. Vi bryter ut faktorn $x - 1$ och finner att ekvationen (2) kan skrivas

$$(x-1)(x^2 + x + 10) = 0.$$

Men $x^2 + x + 10 = (x + \frac{1}{2})^2 + 9\frac{3}{4}$, som är > 0 för alla x. Den enda reella roten är $x = 1$. Följaktligen är $a - b = 1$ som ju är ett rationellt tal.

3. Enligt sinussatsen är

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R},$$

där R är den omskrivna cirkelns radie. Villkoret $a + c = 2b$ leder till villkoret

$$2R \sin A + 2R \sin C = 2 \cdot 2R \sin B,$$

eller

$$(1) \qquad \sin A + \sin C = 2 \sin B.$$

Vi utnyttjar nu sambandet

$$\sin A + \sin C = 2\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}. \tag{2}$$

Men $A + C = \pi - B$, varför (2) under användning av (1) kan skrivas

$$2\sin B = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)\cdot\cos\frac{A-C}{2},$$

eller

$$4\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2},$$

som kan förenklas till

$$2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2},$$

eftersom $\cos\frac{B}{2} \neq 0$ för $0 < B < \pi$. Kvadrering av de båda leden ger

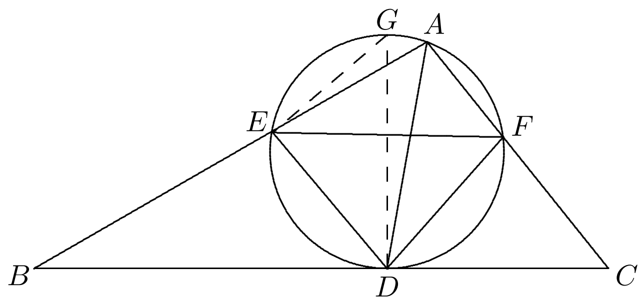
$$4\sin^2\frac{B}{2} = \cos^2\frac{A-C}{2}.$$

Efter övergång till dubbla vinkeln antar ekvationen formen

$$\frac{1}{2}\cdot 4(1-\cos B) = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(A-C)),$$

av vilken det följer att $\cos(A-C) + 4\cos B = 3$.

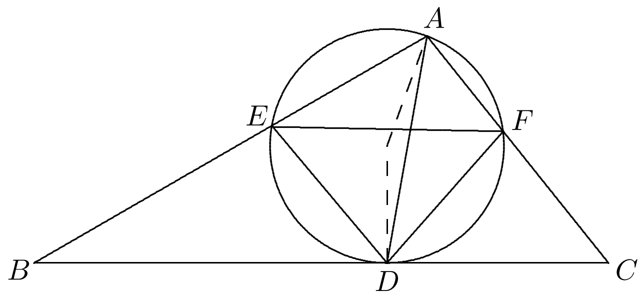
4. Lösning 1: Vi använder beteckningar enligt figur 1, där vi har dragit kordorna DE, DF, EF samt diametern DG. Eftersom vinkeln $\angle ADC = 80°$ är $\angle ADG = 10°$. Enligt randvinkelsatsen är $\angle AEG = 10°$ (vinklarna ADG och AEG står på samma båge). Eftersom vidare $\angle GED = 90°$ (står på en halvcirkelbåge) blir $\angle AED = 80°$, varav följer att $\angle BED = 100°$. Vi har följande allmänna resultat: Om en tangent bildar vinkeln γ med en korda genom tangeringspunkten har randvinkeln på andra sidan kordan och stående på kordan också vinkeln γ.



Figur 1

Då motstående vinklar i en fyrhörning inskriven i en cirkel är 180° blir $\angle AFD = 100°$. Men EF är bisektris till vinkeln AFD, varför $\angle AFE = \angle EFD = 50°$. Vinkeln EAD står på samma båge som vinkeln EFD, medan vinkeln ADE står på samma båge som vinkeln AFE. Enligt randvinkelsatsen är därför $\angle EAD = \angle ADE = 50°$. Nu är $\angle BDE = 180° - \angle ADE - \angle ADC = 180° - 50° - 80° = 50°$. Genom att använda vinkelsumman i en triangel får vi slutligen $\angle ABC = 180° - \angle AFD - \angle ADE = 180° - 100° - 50° = 30°$.

Lösning 2. Vi använder beteckningar enligt figur 2, där vi har dragit kordorna DE, DF, EF samt radierna OA och OD. Triangeln AOD är likbent, varför $\angle OAD = \angle ODA = 10°$, medan $\angle AOD = 160°$. Men medelpunktsvinkeln AOD och randvinkeln AED står på samma båge. Alltså är $\angle AED = 80°$. Eftersom summan av motstående vinklar i en inskriven fyrhörning är $180°$ måste $\angle AFD = 100°$.



Figur 2

Då sträckan EF är bisektris till vinkeln AFD blir $\angle EFD = 50°$. Randvinklarna EAD och EFD står på samma båge, varför $\angle EAD = 50°$. Vidare är $\angle ADB = 180° - \angle ADC = 100°$. Vi har därmed bestämt två av vinklarna i triangeln ABD och det följer att $\angle ABD = 30°$.

Svar: Storleken av vinkeln ABC är $30°$.

5. Om polynomets grad är högst 1, så är $P'' = 0$ och då följer av den givna ekvationen, $(P'(x))^2 = cP''(x)P(x)$, att $P' = 0$ varför P är ett konstant polynom. I detta fall duger varje värde på c. Om vi sätter $c = 0$ får vi också $P' = 0$ och följaktligen är P en konstant. Vid sökandet efter polynom av högre grad och som uppfyller ekvationen kan vi alltså förutsätta att $c \neq 0$.

Antag sålunda att P är en lösning till ekvationen av grad ≥ 2 motsvarande ett $c \neq 0$ och låt α vara ett nollställe till P' av multiplicitet m, dvs $P'(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$, där α inte är nollställe till polynomet $Q(x)$. Då måste α vara ett nollställe till P'' av multiplicitet $m-1$. Vi har nämligen

$$\begin{aligned} P''(x) &= (x-\alpha)^m Q'(x) + m(x-\alpha)^{m-1}Q(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1}\left((x-\alpha)Q'(x) + mQ(x)\right), \end{aligned}$$

där polynomet inuti den sista parentesen inte kan innehålla faktorn $(x-\alpha)$. I den givna ekvationen måste vidare nollstället α ha samma multiplicitet i de båda leden, nämligen $2m$. Nollstället α är därför ett nollställe till P av multiplicitet $m+1$.

Om P' har k olika nollställen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ med resp multipliciteter $m_1, m_2, \ldots, m_k$, så gäller således att P har samma nollställen, men med multipliciteter $(m_1+1), (m_2+1), \ldots, (m_k+1)$. Men i så fall är P' ett polynom av grad $m_1+m_2+\ldots+m_k$, medan P är ett polynom av grad $(m_1+1)+(m_2+1)+\ldots+(m_k+1) = m_1+m_2+\ldots+m_k+k$. Men detta kan bara gälla om $k=1$ (graden för P och graden för P' skiljer sig ju bara med 1). Alltså måste P ha ett enda nollställe, dvs vi har

$$P(x) = a(x-\alpha)^n \quad (n \geq 2),$$

där a är en konstant $\neq 0$. Kontroll visar att detta polynom uppfyller ekvationen för varje $n \geq 2$. Vi finner att $P'(x) = na(x-\alpha)^{n-1}$ och $P''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}$ och ekvationen övergår i

$$n^2a^2(x-a)^{2n-2} = c \cdot n(n-1)a^2(x-a)^{2m-2},$$

varav följer att $c = \frac{n}{n-1}$.

Svar: Ekvationen är uppfylld om polynomet P är en konstant, samt om polynomet är av grad ≥ 2 och är på formen $P(x) = a(x - \alpha)^n$, där a är en godtycklig konstant $\neq 0$. I det förra fallet duger varje värde på c; i det senare fallet är $c = \frac{n}{n-1}$.

6. Antag att vi har a horisontella vänsterbrickor, b horisontella högerbrickor och c vertikala brickor. Låt oss tilldela rutorna tal så att talsumman för vertikala brickor är lika med noll, för horisontella vänsterbrickor lika med något tal k och för horisontella högerbrickor lika med talet $-k$, där k är ett lämpligt tal $\neq 0$.

Antag att vi lyckats konstruera en sådan utplacering av tal. Summan av samtliga 64 tal är enligt förutsättningarna lika med 0, vilket inses om brädet täcks med enbart vertikala brickor. Men vi kan också uttrycka summan i antalet olika bricktyper och får sambandet

$$a \cdot k + b \cdot (-k) + c \cdot 0 = 0,$$

varav

$$a = b$$

och påståendet följer.

Det återstår att visa att det existerar en utplacering av tal av nämnt slag. Om vi nämligen numrerar rutorna i varje rad från 1 till 8, men med minustecken i de svarta rutorna, så får vi följande uppställning:

1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8

Villkoren är här uppfyllda med $k = 1$.