

Finaltävling den 20 november 1999

1. Lös ekvationen

$$|||x^2 - x - 1| - 2| - 3| - 4| - 5| = x^2 + x - 30.$$

2. Två cirklar med medelpunkterna O_1 och O_2 tangerar varandra utvändigt. Man drar en linje som tangerar cirkelarna i punkterna A och B . Visa att om sträckan AB delas på mitten av punkten P så är vinkeln O_1PO_2 rät.

3. Lös ekvationen

$$5^x + 6^y + 7^z + 11^u = 1999$$

i icke-negativa heltal x, y, z, u .

4. En liksidig triangel har hörn på tre av sidorna i en kvadrat med sidan 1. Vad kan sägas om sidlängden i triangeln?
5. Låt x_1, x_2, \dots, x_n vara icke-negativa reella tal med summan s . Bevisa att

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n \leq \frac{s^2}{4}.$$

6. På en skrivtavla finns $n \geq 3$ positiva heltal. Man väljer två tal, a och b , sådana att inget av dem delar det andra (vi antar att talen är sådana att detta är möjligt). Sedan ersätter man a med största gemensamma delaren till a och b , medan man ersätter b med minsta gemensamma multipeln till a och b . Visa att

- 1) man efter en ändlig följd av operationer har ett läge där inga valmöjligheter finns, dvs för varje par av tal är det ena talet en delare till det andra,
- 2) de tal som till slut finns kvar på tavlan är oberoende av i vilken ordning talparen har valts.

Exempel: Antag att de ursprungliga talen är 4, 6 och 9. Man väljer talen 4 och 6. Deras största gemensamma delare är 2, medan deras minsta multipel är 12. Sedan väljer man 9 och 12 som ersätts med 3 och 36. Man har nu talen 2, 3 och 36 varefter man får slutsteget (1, 6, 36). Följden blir alltså

$$(4, 6, 9) \rightarrow (2, 12, 9) \rightarrow (2, 3, 36) \rightarrow (1, 6, 36).$$

Med samma tre utgångstal skulle man också kunna få följden

$$(4, 6, 9) \rightarrow (4, 3, 18) \rightarrow (1, 12, 18) \rightarrow (1, 6, 36).$$

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!