SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 4 oktober 2000

1 LÖSNING 1. Först noterar vi att både x och y måste vara positiva tal, annars kan inte summorna i vänsterleden vara positiva samtidigt. Multiplikation av vänsterleden ger

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1,$$

vilket ska vara lika med produkten av högerleden, dvs 4, och vi får

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=0.$$

Det betyder att uttrycket inom parentes måste vara lika med 0 och därmed att $x=y$. Endera av ekvationerna ger nu att $x=y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

LÖSNING 2. Ekvation 1 ger $y=\sqrt{2}-x$ som efter insättning i ekvation 2 ger

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}-x}=2\sqrt{2},$$

som också kan skrivas

$$\frac{\sqrt{2}}{x(\sqrt{2}-x)}=2\sqrt{2},$$

varav

$$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=0$$

eller

$$(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2=0.$$

Enda lösningen är $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, som insatt i ekvation 1 (eller ekvation 2) ger $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

SVAR: Entydig lösning är $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Eftersom den andra produkten är delbar med 5, måste något av talen $a+1$, $b+1$ och $c+1$ vara delbart med 5. Detta betyder i sin tur att något av talen a, b och c slutar på 4 eller 9. Eftersom $84=2\cdot 2\cdot 3\cdot 7$, finner vi snart att enda möjliga faktoriseringar $a\cdot b\cdot c$, där någon faktor slutar på 4 eller 9, är $1\cdot 1\cdot 84$, $1\cdot 4\cdot 21$, $3\cdot 4\cdot 7$, $2\cdot 3\cdot 14$ och $1\cdot 6\cdot 14$. Av dessa är det bara det näst sista fallet som uppfyller förutsättningarna: $(a+1)(b+1)(c+1)=3\cdot 4\cdot 15=180$.
   Svar: Enda lösningen är $(a,b,c)=(2,3,14)$.

3. Vi kan låta tiderna som krävs för A, B, C, D att köra sträckan vara resp T, $T+t$, $T+2t$, $T+3t$. Enligt förutsättningarna är $T+3t=2T$, varav $T=3t$. Tiderna kan alltså skrivas resp $3t$, $4t$, $5t$, $6t$. Eftersom förhållandet mellan $B:s$ och $C:s$ tider är 4 till 5, måste förhållandet mellan hastigheterna vara det omvända, 5 till 4. Hastigheten för C är alltså 80% av hastigheten för B, dvs C kör 20% långsammare än B.
   Svar: C kör 20% långsammare än B.

4. Täljaren i vänsterledet kan skrivas på formen

$$a^2(a + \frac{1}{a}) + \frac{1}{a^2}(a + \frac{1}{a}) + (a + \frac{1}{a}) = (a^2 + \frac{1}{a^2} + 1)(a + \frac{1}{a}),$$

dvs olikheten är ekvivalent med att $a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \geq 3$. Men denna olikhet är i sin tur ekvivalent med olikheten

$$a^4 + 1 \geq 2a^2,$$

eller

$$(a^2 - 1)^2 \geq 0,$$

som uppenbarligen gäller. Likhet har vi om och endast om $a = 1$.

5. I parallellogrammen $ABCD$ skär diagonalerna varandra i punkten P som figuren visar. Låt diagonalerna ha längderna $2a$ resp $2b$ (diagonalerna delar varandra mitt itu) samt låt den större sidan ha längden c och den mindre längden d. Vi söker alltså kvoten a/b när kvoten c/d är så stor som möjligt. Cosinussatsen tillämpad i på resp trianglar APB och BPC

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 135^\circ \\ d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 45^\circ \end{aligned}$$

eller

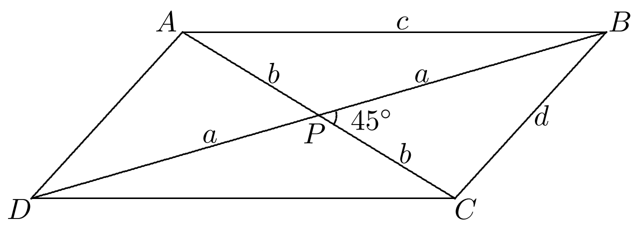
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab \\ d^2 &= a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \end{aligned}$$

Då c/d är maximal samtidigt som c^2/d^2 är maximal, gäller det att bestämma värdet på $x = a/b$ när c^2/d^2 antar sitt största värde. Den senare kvoten kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab}{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} &= \frac{(a^2 + b^2)(1 + \sqrt{2}ab/(a^2 + b^2))}{(a^2 + b^2)(1 - \sqrt{2}ab/(a^2 + b^2))} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)}}{1 - \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)}}, \end{aligned} \tag{1}$$

där $p = a^2/(a^2 + b^2)$ uppfyller $0 < p < 1$. Funktionen $p(1 - p)$ antar sitt maximum $1/4$ för $p = 1/2$. Med $p = 1/2 + c$ blir nämligen $p(1-p) = (1/2+c)(1/2-c) = 1/4-c^2 \leq 1/4$, med likhet om och endast om $c = 0$.

Betrakta kvoten i (1). Den antar uppenbarligen sitt största värde när täljaren är som störst och nämnaren som minst, vilket inträffar när $p = 1/2$, dvs när $a = b = 1$, vilket innebär att $ABCD$ bildar en rektangel. Observera att nämnaren i (1) alltid är positiv eftersom $1 - \sqrt{2}\sqrt{p(1-p)} \geq 1 - \sqrt{2}/2 > 0$. Kvotens maximivärde är $(2 + \sqrt{2})/(2 - \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,828$.



Svar: Kvoten mellan diagonalernas längder antar värdet 1 när kvoten mellan sidornas längder är maximal. Parallellogrammen är då en rektangel.

6. Det räcker att visa likheten för positiva heltal n. För $n = 0$ är likheten uppenbarligen sann och för negativa heltal n får vi samma likhet om n byts mot $-n$.

   Låt oss för varje positivt heltal n dela upp mängden M i delmängder, där varje delmängd antingen består av tal som bildar en ändlig aritmetisk talföljd på formen k, $k + n$, $k + 2n$, $\ldots$, $k + (r - 1)n$ eller där varje delmängd bildar en oändlig aritmetisk talföljd på formen k, $k + n$, $k + 2n$, $\ldots$.

   För alla tal m i den ändliga mängden är antalet m för vilka $m+n$ inte tillhör mängden detsamma som antalet tal $m - n$ som inte tillhör mängden, dvs sådana delmängder skulle kunna plockas bort ur M utan att värdet på $f(-n) - f(n)$ förändras.

   Däremot för de oändliga delmängderna gäller det att för varje tal m i delmängden är också talet $m + n$ ett tal i delmängden, medan det för alla tal av typ $m - n$, med ett undantag, tillhör delmängden. För det minsta talet i delmängden, m_0 säg, kan inte $m_0 - n$ tillhöra delmängden. Följaktligen gäller det för varje sådan delmängd att värdet på $f(-n) - f(n)$ är lika med 1.

   Eftersom talen i varje delmängd uppträder periodiskt med perioden n kan det på sin höjd finnas n olika delmängder. Det måste dock finnas minst n delmängder. Talen $2001, 2002, \ldots, 2000 + n$ förekommer nämligen i exakt var sin delmängd. Det finns alltså exakt n oändliga delmängder, varför det sammantaget måste gälla att $f(-n) - f(n) = n$.