Hej!

Här kommer några uppgifter du kan titta på som förberedelse för nästa års matematiktävling, eller bara för att det är roligt att jobba med matematik. En del av problemen är relativt enkla, andra är något att bita i. Bli inte förvånad om du inte kan lösa alla, åtminstone inte med en gång. En del är riktigt svåra. Om du fått sådana problem tidigare kommer du att märka att de till största delen upprepas från år till år, dock finns det varje gång minst ett tiotal nya uppgifter att jobba med. Din lärare har tillgång till lösningsförslag. På matematiktävlingens hemsida hittar du bl.a. uppgifterna från de senaste årens kval- och finalomgångar (med lösningar). Adressen är

http://www.math.uu.se/~dag/skolornas.html

Om du har några frågor är du välkommen att skriva till mig

jana@math.chalmers.se

Hoppas att du även i fortsättningen tycker att matematik är ett roligt ämne som är värt att satsa på!

Hälsningar

Jana Madjarova, Matematik, Chalmers,
Medlem i Tävlingskommittén

Göteborg, hösten 2008

Problem

1. Givet 16 fotbollslag och att varje lag möter varje annat lag, visa att det vid varje tidpunkt finns minst två lag som har spelat samma antal matcher.

2. Finn alla heltalslösningar till ekvationen $xy = 2x - y$.

3. Talet x bildas genom att man på ett godtyckligt sätt blandar siffrorna i 111 exemplar av talet 2000. Visa att x inte är kvadraten till något heltal.

4. En stege lutas mot ett hus och når 5 m upp på väggen. Samma stege svängs 60° utan att man flyttar dess stödpunkter och når då 3 m upp på väggen på andra sidan gränden. Hur bred är gränden?

5. Visa att

$$\sqrt[3]{413} > 6 + \sqrt[3]{3}.$$

6. Givet är sex kongruenta cirkelskivor i planet med icke-tomt snitt. Visa att minst en av dem innehåller medelpunkten till en av de andra.

7. Basen till en pyramid är en regelbunden n-hörning med sidlängd $2a$. Pyramidens övriga sidor är likbenta trianglar med area a^2. Bestäm n.

8. Givet en vinkel (mindre än $180°$) och en punkt P i dess inre, drag (med hjälp av passare och omarkerad linjal) en linje genom P sådan att sträckan som vinkeln skär av linjen halveras av P.

9. Givet är en vinkel med spets i punkten O och ben p och q. Låt $A, B \in p$ och $C, D \in q$. Finn mängden av alla punkter M i vinkelns inre sådana att summan av areorna av trianglarna ABM och CDM är lika med S (konstant).

10. Finn alla heltalslösningar till ekvationen

$$x^y = y^x.$$

11. Det naturliga talet n är sådant att det finns en rätvinklig triangel med hypotenusa $2n$ och kateter naturliga tal. Visa att det även finns en rätvinklig triangel med hypotenusa n och kateter naturliga tal.

12. En biljardboll ligger vid kanten till ett runt biljardbord med radie R. Efter ett slag reflekteras bollen i kanten sex gånger, utan att på vägen ha kommit närmare bordets centrum än $\frac{9R}{10}$. Kan bollen vid den sjätte reflexionen ha fullbordat ett helt varv kring bordets centrum? Motivera!

13. Bestäm alla p sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + \frac{1}{\cos^2(p \cdot 180°)} = 0$$

har minst en reell rot.

14. I varje punkt med heltalskoordinater i planet har man placerat en säck med bollar så att (a) det finns inte fler än 2005 bollar i någon säck; (b) antalet bollar i varje säck är lika med (det aritmetiska) medelvärdet av antalet bollar i säckarna i punktens fyra närmsta grannpunkter. Visa att det finns lika många bollar i alla säckar.

15. Låt f vara en kongruensavbildning i planet som är sammansättning (i valfri ordning) av en translation och en rotation (ej ett helt antal varv). Visa att det finns en entydigt bestämd punkt P i planet sådan att $|PA| = |Pf(A)|$ för varje punkt A i samma plan.

Ur "Korrespondenskurs 2002/2003"

1. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers in arithmetic progression. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{n-k+1}} > \frac{4n}{(a_1+a_n)^2}\,.$$

2. A mouse eats his way through a $3 \times 3 \times 3$ cube of cheese by tunneling through all of the 27 $1 \times 1 \times 1$ sub-cubes. If he starts at one of the corner sub-cubes and always moves onto an uneaten adjacent sub-cube can he finish at the center of the cube? (Assume that he can tunnel through walls but not edges or corners.)

3. Find all positive real solutions of the system

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 9, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} &= 1. \end{aligned}$$

4. Prove that for any real numbers a, b, c such that $0 < a, b, c < 1$, the following inequality holds

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

5. In the triangle ABC, the midpoint of BC is D. Given that $\angle ADB = 45^\circ$ and $\angle ACB = 30^\circ$, determine $\angle BAD$.

6. Five points are given in the plane such that each of the 10 triangles they define has area greater than 2. Prove that there exists a triangle of area greater than 3.

Ur "Korrespondenskurs 2003/2004"

1. Let $p(3) = 2$ where $p(x)$ is a polynomial with integer coefficients. Is it possible that $p(2003)$ is a perfect square?

2. The cat from the neighbouring village keeps coming to Dunce-village to irritate their dogs. Every night when all of them are sleeping, the cat sneaks up to Dunce-village, mews out loud and runs back home. When the cat mews, all dogs that are up to 90 m away from the cat, start barking. As Dunce-village is small, any two dogs in the village are up to 100 m from each other. Is it possible for the cat to take a position such that all dogs start barking at the same time?

3. Let D be the midpoint of the hypotenuse AB of the right triangle ABC. Denote by O_1 and O_2 the circumcenters of the triangles ADC and DBC, respectively. Prove that AB is tangent to the circle with diameter O_1O_2.

4. Prove the inequality

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}\geq 3$$

for all positive numbers a, b, c.

5. Solve the following system in real numbers

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & y^2 & - & z(x+y) & = & 2 \\ y^2 & + & z^2 & - & x(y+z) & = & 4 \\ z^2 & + & x^2 & - & y(z+x) & = & 8 \end{array}.$$

6. Given a triangle such that the sines of all three angles are rational numbers, prove that the cosines of all three angles are rational too.

Ur "Korrespondenskurs 2004/2005"

1. Each of the players in a tennis tournament played one match against each of the others. If every player won at least one match, show that there is a group A, B, C of three players for which A beat B, B beat C and C beat A.

2. Suppose p, q are distinct primes and S is a subset of $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Let $N(S)$ denote the number of solutions of the equation

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \equiv 0 \pmod{p},$$

where $x_i \in S,\ i = 1, 2, \ldots, q$. Prove that $N(S)$ is a multiple of q.

3. The points A, B, C, D, E, F on a circle of radius R are such that $AB = CD = EF = R$. Show that the middle points of BC, DE, FA are vertices of an equilateral triangle.

4. Find all functions $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(n+m) + f(n-m) = f(kn), \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m \leq n,$$

where k is a fixed nonnegative integer.

5. Let $\triangle ABC$ be an isosceles triangle with $AB = AC$ and $\angle A = 20°$.The point D on AC is such that $AD = BC$. Determine the angle $\angle BDC$.

6. The numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are positive and such that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Show that

$$\frac{a_1}{1+a_1\sqrt{2}}+\frac{a_2}{1+a_2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_n\sqrt{2}}\leq\frac{n}{n+\sqrt{2}}.$$

When does equality occur?

Ur "Korrespondenskurs 2005/2006"

1. The circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ intersect at A and B. The tangent line to $\mathcal{C}_2$ at A meets $\mathcal{C}_1$ at the point C and the tangent line to $\mathcal{C}_1$ at A meets $\mathcal{C}_2$ at the point D. A ray from A, interior to the angle $\angle CAD$, intersects $\mathcal{C}_1$ at M, $\mathcal{C}_2$ at N and the circumcircle of the triangle $\triangle ACD$ at P. Prove that $AM = NP$.

2. Let h be a positive integer and let $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ be the sequence defined by recursion as follows:

$$a_0 = 1; \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{if } a_n \text{ is even,} \\ a_n + h & \text{if } a_n \text{ is odd.} \end{cases}$$

(For instance, if $h = 27$ one has $a_1 = 28, a_2 = 14, a_3 = 7, a_4 = 34, a_5 = 17, a_6 = 44\ldots$).

For which values of h does there exist $n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) such that $a_n = 1$?

3. Find all natural numbers n such that there exists a polynomial p with real coefficients for which

$$p\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^n - \frac{1}{x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

4. Let S be a set of n points in the plane such that any two points of S are at least 1 unit apart. Prove that there is a subset T of S with at least $n/7$ points such that any two points of T are at least $\sqrt{3}$ units apart.

5. A number of points on a circle of radius 1 are joined by chords. It is known that any diameter of the circle intersects at most 6 of the chords. Prove that the sum of the lengths of the chords is less than 19.

Ur "Korrespondenskurs 2006/2007"

1. How many five-digit palindromic numbers divisible by 37 are there?

2. How many points (x, y) are there on the circle $x^2 + y^2 = 1$ such that x and y have at most (a) two (b) m decimal places? (m is a non-negative integer)

3. Sixteen points in the plane form a 4×4 grid. Show that any seven of these points contain three which are the vertices of an isosceles triangle. Will the statement still hold if we replace seven by six?

4. An (a) $n \times n$ square ((b) $n \times p$ rectangle) is divided into (a) n^2 ((b) np) unit squares. Initially m of these squares are black and all the others are white. The following operation is allowed: If there exists a white square which is adjacent to at least two black squares, we can change the colour of this square from white to black. Find the smallest possible m such that there exists an initial position from which, by applying repeatedly this operation, all unit squares can be made black.

5. Show that the inequality

$$3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

holds for all positive reals a, b, c. Determine the cases of equality.

Ur "Korrespondenskurs 2007/2008"

1. For all real numbers a, let $\lfloor a \rfloor$ denote the largest integer less than or equal to a, and let $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor - \{z\} = 2,98 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 4,05 \\ -\{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 5,01 \end{cases} .$$

2. Let A, B, C, D be points in the plane such that

$$0 < AB, AC, AD < 1 < BC, BD, CD.$$

Show that the four points do not lie on a circle.

3. The sum of n real numbers is positive and the sum of their squares is greater than n^2. Show that at least one of the numbers is greater than 1.

4. Between every pair of cities in a country there is a flight in each direction operated by one of several airlines. If an airline has direct flights between A and B and between B and C, then it has no direct flights between A and C. Show that one can travel through the country, passing all the cities exactly once, and in such a way that one changes airlines on each transfer occasion. (The travel begins and ends in different cities.)

5. The infinite sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, consists of natural numbers (i.e. positive integers) and is such that

$$a_1 = 1, \qquad a_n^2 > a_{n-1}a_{n+1} \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prove that $a_n \geq n$ for all $n \in \mathbb{N}$.