UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Darpö

Prov i matematik
X
Linjär algebra II
2008-12-19

Skrivtid 14–19. Hjälpmedel: Skrivdon, litteratur, anteckningar. ***Ej*** *elektroniska hjälpmedel såsom miniräknare och dylikt.*
Första delen av tentan görs enbart av dem, som inte har klarat inlämningsuppgiften, andra delen av tentan görs av alla. För godkänt betyg på kursen krävs antingen godkänt på tentans båda delar, eller godkänt resultat på inlämningsuppgiften och tentans andra del. Gränsen för godkänt på tentans första del är 10 poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 14, 19 respektive 24 poäng på tentans andra del.
Varje uppgift ger maximalt sex poäng. För full poäng krävs tydligt motiverade lösningar.

Del ett

1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm baser i värderum och nollrum till avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.

2. a) Ange en linjärt oberoende delmängd av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Utvidga den linjärt oberoende mängden från a) till en bas i $\mathbb{R}^4$.

3. Låt $E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Visa att $\underline{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22},)$ är en bas i rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ av 2×2-matriser.

b) Låt $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ vara den linjära avbildning som ges av $F(A) = \dfrac{1}{2}(A - A^t)$ (här betecknar A^t transponatet till A). Finn matrisen för F i basen $\underline{E}$.

Del två

4. a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till den avbildning som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Lös systemet $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2, \\ y_3' = 2y_1 + 3y_3. \end{cases}$

5. Låt $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ vara speglingen i normalplanet till vektorn $u = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Bestäm F:s matris i standardbasen.

6. Låt

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Visa att avbildningen $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4,\ x \mapsto Ax$ är en isometri.

b) Finn en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med avseende på skalärprodukten $\langle x, y\rangle = x^t By$.

c) Med skalärprodukten från b), bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ på $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right]^{\perp} \subset \mathbb{R}^3$.

7. Låt $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A\}$ vara rummet av symmetriska $n\times n$-matriser.

a) Ge exempel på en linjär avbildning från $\mathcal{P}_3$ till $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$.

b) Avgör om din avbildning är injektiv/surjektiv/bijektiv.

c) Ge ett exempel på en bijektiv linjär avbildning från $\mathcal{P}_2$ till $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$.

8. a) Givet en symmetrisk $n\times n$-matris A, definera en kvadratisk form $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genom $Q_A(x) = x^t Ax$. Visa att

$$x^t Ay = \frac{1}{2}(Q_A(x+y) - Q_A(x) - Q_A(y))$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) Låt $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en kvadratisk form. Visa att funktionen

$$(\,\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x|y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

uppfyller följande villkor för alla $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(SP1) $(x|y) = (y|x)$,

(SP2) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$,

(SP3) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$.

c) Visa att $(\cdot|\cdot)$ är en skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\operatorname{sign}(q) = (1, \ldots, 1)$.