

Linjär algebra II

Tredje tentamensförberedande uppgiften

Dessa uppgifter utgör extra övningsmaterial inför tentan. De är frivilliga, löses hemma, och lämnas inte in för rättning. Istället går vi igenom dem på räkneövningen den 8 mars.

1. Avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ ges av $F(p(x)) = xp(x - 3)$.

- (a) Visa att F är linjär.
- (b) Ange F 's matris med avseende på standardbaserna i \mathcal{P}_2 och \mathcal{P}_3 .
- (c) Finn en bas i F 's kärna.
- (d) Finn en bas i F 's bild.
- (e) Hur hänger dina svar på (c) och (d) ihop med dimensionssatsen?
- (f) Utred huruvida F är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

2. Låt $q(x, y)$ vara en kvadratisk form i två variabler. Kurvan $K : q(x, y) = 1$ kallas *hyperbel* om $\text{sign}(q) = (1, -1)$.

- (a) Visa att kurvan $K : x^2 + y^2 + 6xy = 1$ är en hyperbel.
- (b) Ange K 's symmetriaxlar.
- (c) Bestäm K 's minsta avstånd från origo.

3. Ytan Y i \mathbb{E}^3 består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller ekvationen

$$7x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 36 .$$

Bestäm ytans typ, ytans största och minsta avstånd från origo, samt de punkter på ytan där det största och minsta avståndet antas. (Punkternas koordinater skall anges i standardbasen.)

VAR GOD VÄND!

4. Den linjära operatören R på \mathbb{E}^3 ges som rotation med vinkeln $\frac{2\pi}{3}$ kring den axel A genom origo som har riktningsvektor $a = (1, 1, 1)$. Rotationen sker moturs om man tittar på A^\perp så att vektorn a pekar mot betraktarens öga.

(a) Finn en on-bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i \mathbb{E}^3 så att $b_2 \perp a$ och $b_3 \perp a$.

(b) Ange R 's matris i denna bas \underline{b} .

(c) Bestäm R 's matris i standardbasen.

(d) Ange $R(x)$ för $x = (29, 31, 37)$.

5. Visa att avbildningarna

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

är linjära. Utred huruvida de är injektiva, surjektiva, eller bijektiva.