UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
EI, IT, K, X
Linjär algebra
2005–01–11

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (3,1,1,2)$, $u_2 = (2,1,0,1)$, $u_3 = (4,1,2,3)$, $u_4 = (2,1,1,1)$. Bestäm en bas i M bland dessa vektorer och bestäm även $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $v = (3a+5, 2a+2, a+2, 2a+4)$ tillhör M. Ange för ett sådant a-värde koordinaterna för v i den valda basen.

2. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en bas i det linjära rummet $\mathbf{L}$. Visa att

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\\ \mathbf{f}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

är en ny bas. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ i den nya basen.

3. N är ett delrum till $\mathbb{E}^4$ som definieras genom

$$N = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$$

Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet $N^\perp$, till N. Skriv vektorn $w = (2,3,1,-2)$ som en summa $w = u + v$, där $u \in N$ och $v \in N^\perp$.

4. Bestäm standardmatrisen A för den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ som geometriskt kan beskrivas som en spegling i planet $y + 2z = 0$.

5. Visa att ekvationen $2xy - z^2 = 1$ beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxeln samt minsta avståndet från ytan till origo.

6. Låt F vara den linjära operatorn på $\mathbb{R}^3$ med standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}.$$

(a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar?

(b) Visa att F är diagonaliserbar då $a = 1$. Bestäm, då $a = 1$, en diagonalmatris D och en inverterbar matris P sådana att $A = PDP^{-1}$.

Var god vänd!

7. Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara det linjära rummet av alla reella (2×2)-matriser och låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den linjära avbildningen $F : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definieras genom $F(B) = BA$. Finn en bas i F:s värderum.

8. Låt F vara en linjär operator på det linjära rummet L sådan att $F \circ F = I$, där I är identitetsoperatorn på L. Visa att varje vektor $u \in L$ entydigt kan skrivas som

$$u = v + w$$

där $F(v) = v$ och $F(w) = -w$.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i Linjär algebra 2005–01–11

1. u_1, u_2, u_4 är en bas i M. $v \in M$ bara då $a = -1$, i vilket fall kordinaterna för v i basen u_1, u_2, u_4 är 2, -1, -1.

2. Koordinaterna i den nya basen är 2, -2, -1.

3. En ON-bas i $N^\perp$ är t ex $(1,-1,1,0)/\sqrt{3}$ och $(1,2,1,1)/\sqrt{7}$. $u = (1,1,0,-3)$, $v = (1,2,1,1)$.

4.

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

5. Ytan är en tvåmantlad (rotations-)hyperboloid. Rotationsaxeln går genom origo och är parallell med vektorn $(1,1,0)$. Minsta avståndet till origo är 1.

6. F är diagonaliserbar då $a \neq 0$. Då $a = 1$ gäller att $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$