Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Cecilia Holmgren
Jimmy Kungsman

Vårterminen 2009
Civilingenjörsprogrammet X
Gymnasielärarprogrammet
Geokandidatprogrammet
Fristående kurser

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2009–03–18

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan får full poäng på första uppgiften, förutsatt att den inte bearbetas. Om den första uppgiften bearbetas ändå, då förfaller duggans bonus.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3y - 2z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ 2w + 4x + 5y + z = 3 \end{cases}$$

2. Låt $S = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ och $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att S är inverterbar, och ange inversen till S.

(b) Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen $SXS^T = I$.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Finn elementärmatriser E_1, E_2, E_3, E_4 så att $E_4E_3E_2E_1A = I$.

(b) Skriv A som produkt av elementärmatriser.

4. Bestäm alla värden på x för vilka matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

inte är inverterbar.

Var god vänd!

5. Beräkna avståndet mellan punkten $P = (8, 8, 8)$ och planet π som går genom punkterna $A = (-1, -1, -1)$, $B = (0, 1, 2)$ och $C = (1, 0, 2)$. Bestäm även den punkt N i planet π som ligger närmast P.

6. Givet är punkterna $A = (-1, -1, -1)$, $B = (0, 1, 2)$ och $C = (1, 0, 2)$ i rymden.

(a) Bestäm punkten D så att A, B, C, D är hörnpunkterna till ett parallellogram.

(b) Beräkna arean av detta parallellogram.

(c) Beräkna volymen av den parallellepiped som späns upp av vektorerna $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{AP}$, där $P = (8, 8, 8)$.

7. Speglingen i planet $\pi : x + 2y + z = 0$ är en linjär operator $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Finn dess matris, samt spegelbilden $S(P)$ av punkten $P = (7, 8, 9)$.

8. Låt $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara avbildningen

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - 3x_2 + x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 - 6x_2 - x_3,\ x_4).$$

(a) Förklara varför avbildningen f är en linjär operator.

(b) Ange f:s matris.

(c) Avgör om operatorn f är inverterbar eller inte.

(d) Finns det olika vektorer $x \neq y$ i $\mathbb{R}^4$ som avbildas på samma vektor $f(x) = f(y)$? Motivera ditt svar.

(e) Finns det en vektor $y \in \mathbb{R}^4$ så att $f(x) \neq y$ för alla $x \in \mathbb{R}^4$? Motivera ditt svar.

Lycka till!