

**Prov i matematik**  
**Linjär algebra och geometri I, 5hp**  
**2009–08–18**

*Skrivtid: 9.00–14.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.*

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} w + x + 2y - z = 2 \\ w + 2x + 3y - 2z = 1 \\ 2w + 4x + 5y + z = 3 \end{cases}$$

2. Låt  $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  och  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Visa att  $S$  är inverterbar, och ange inversen till  $S$ .  
(b) Bestäm alla matriser  $X$  som uppfyller ekvationen  $SXS^{-1} = I$ .

3. Låt  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Finn elementärmatriser  $E_1, E_2, E_3$  så att  $E_3E_2E_1A = I$ .  
(b) Skriv  $A$  som produkt av elementärmatriser.

4. (a) För vilka värden på  $x$  och  $y$  är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inte inverterbar?

- (b) Tolka dessa par  $(x, y)$  geometriskt som en delmängd i planet.  
(c) Bestäm  $A^{-1}$  för alla par  $(x, y)$  så att  $A^{-1}$  finns.

VAR GOD VÄND!

5. Givet är vektorerna  $v = (2, 3)$  och  $w = (5, t)$  i planet. För vilka värden på  $t$  är vinkeln mellan  $v$  och  $w$  (a) rät, (b) spetsig, (c) trubbig?

6. Planet  $\pi$  går genom punkterna  $A = (0, 1, 1)$ ,  $B = (2, 0, 2)$  och  $C = (3, 3, 0)$ .

(a) Finn planets ekvation på formen  $ax + by + cz + d = 0$ .

(b) Beräkna (det minsta) avståndet mellan punkten  $P = (15, 1, 1)$  och planet  $\pi$ .

(c) Finn den punkt  $N$  i planet  $\pi$  som ligger närmast  $P$ .

7. Givet är punkterna  $S = (-1, -1, -1)$ ,  $A = (0, 2, 2)$ ,  $B = (2, 0, 2)$  och  $C = (2, 2, 0)$  i rymden. Beräkna

(a) arean av parallelogrammet som späns upp av vektorerna  $\vec{SA}$  och  $\vec{SB}$ , samt

(b) volymen av parallelepipeden som späns upp av vektorerna  $\vec{SA}$ ,  $\vec{SB}$  och  $\vec{SC}$ .

8. Den sammansatta operatören  $h = gf$  på  $\mathbb{R}^2$  ges av speglingen  $f$  i linjen  $F : 3x - y = 0$  och speglingen  $g$  i linjen  $G : x + 3y = 0$ . Finn  $h$ 's matris, och tolka  $h$  geometriskt.

LYCKA TILL!