UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ernst Dieterich
Anders Johansson
Walter Mazorchuk
Ryszard Rubinsztein

Prov i matemnatik
HT 2010-VT 2011
Linjär algebra och geometri I
alla program
2011-08-16

Tid: 08.00–13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betyg **3**, **4**, och **5** krävs respektive **18**, **25** och **32** poäng.

1. Beräkna matrisprodukten

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ c & d \end{pmatrix}$$

och bestäm alla värden på a, b, c, d för vilka denna produkt är lika med enhetsmatrisen.

2.

(a) Ge definitionen för en inverterbar kvadratisk matris.

(b) Ge ett exempel på en 2×2 matris som är inverterbar.

(c) Ge ett exempel på en 2×2 matris skild från nollmatrisen som inte är inverterbar.

(d) Bestäm alla värden på den reella parametern a för vilka matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och bestäm inversen för samtliga dessa värden.

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

4. Ett plan i rymden innehåller punkterna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestäm alla punkter A i rymden som tillhör detta plan och dessutom uppfyller kravet att skalärprodukten mellan $\vec{OA}$ och vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är lika med 2.

Var god vänd

5. Punkterna $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ligger i $\mathbb{R}^3$. Bestäm både skalärprodukten och vektorprodukten mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, längden av $\overrightarrow{BC}$ samt arean av triangeln ABC.

6. Visa att vektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende och avgör om de utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Avgör även om vektorn $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ kan skrivas som en linjärkombination av v_1, v_2 och v_3.

7. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras som den linjära avbildning som avbildar $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$. Bestäm F:s matris.

8. Ett plan i rymden har ekvationen $x + y + z = 2$. Ett annat plan i rymden innehåller punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ samt linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Visa att dessa två plan inte har några gemensamma punkter.

LYCKA TILL!