

Tillåtna hjälpmedel: formelblad (på baksidan). Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Feel free to write in English.

Skrivtid: 13.00–18.00.

1. Lös ekvationen $\cos z + \sin z = 3$. (För full poäng krävs att svaret är angivet på formen $a + bi$, där a och b är reella.)

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$$

i en Laurentserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-1-3i)^n$ som konvergerar i punkten $z = 0$. För vilka z i det komplexa talplanet är utvecklingen absolutkonvergent?

3. Bestäm alla singulära punkter för funktionen

$$g(z) = \frac{(z^2 - z - 30)^3 \sin^5(i\pi(z-2))}{(1 + \cos \frac{\pi z}{2})^2}$$

i det komplexa talplanet. Ange även singulariteternas typer.

4. Kurvan C utgör den positivt orienterade randen till kvadraten med hörn i punkterna $\pm 2 \pm 2i$. Beräkna integralen

$$\oint_C \frac{e^{\pi z/4}}{z^6 + 10z^4 + 9z^2} dz.$$

5. Låt C vara den positivt orienterade enhetscirkeln. Bestäm alla funktioner $f(z)$ som är analytiska i området $\{z : 0 < |z| < \infty\}$ och som uppfyller $f'(1) = 6i$, $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 4\pi i$ samt

$$\operatorname{Im} f(z) = \Psi(x^2 - y^2),$$

där $\Psi(t)$ är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av en (reell) variabel. (Svaret skall vara uttryckt endast i termer av z .)

6. Beräkna medelst residuekalkyl integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 25)^2} dx.$$

För full poäng skall alla gränsvärdesoperationer på inblandade integraler noggrant förklaras.

7. Hur många rötter har ekvationen $z^3 + 18z^2 + 25z = 3 \cos z$ i området $\{z : |z| < 2\}$? Hur många av dessa rötter tillhör mängden $\{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$?

8. Visa att den enda funktionen $f(z)$, som är analytisk i området $\{z : 0 < |z| < \infty\}$ och som uppfyller $f(1) = 0$ och $|f(z)| \leq 2^{|k|}$ då $|z| = 3^k$ där k är ett heltal (positivt eller negativt), är den konstanta funktionen $f(z) \equiv 0$. Tips: betrakta koefficienterna i Laurentserien.

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$