UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
F-programmet
Komplex analys
2006–08–21

Skrivtid: 9–14 . Tillåtna hjälpmedel: Icke-symbolhanterande räknare, formelblad (på baksidan). Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje problem ger högst 5 poäng.

1. Lös fullständigt ekvationen
$$\tan z^2 = 1.$$
Svaret skall anges på formen $a + ib$.

2. Låt C vara cirkeln $|z| = 2$ genomlöpt ett varv i positiv led. Definiera funktionen f genom
$$f(z) = \int_C \frac{e^{-w^2}}{(w-z)^2}\,dw \quad (|z| \neq 2).$$
Beräkna $f(4i)$, $f(0)$ och $f'(1)$.

3. Utveckla i Laurentserie i ett område av typ $0 < |z+1| < R$, funktionen
$$f(z) = \frac{z}{z^2+5z+4}.$$
Ange även det största möjliga värdet på R.

4. Beräkna integralerna
   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{4+\cos t}\,dt$, och
   b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z^3+1}\,dz$, där C är cirkeln $|z+1| = 1$ ett varv i positiv led.

5. Hur många rötter har ekvationen $z^2 + 4z = \sin z$ i $|z| < 1$?

6. En funktion f är analytisk i $\mathbb{C}$ med undantag för $z = -1$, där den har en enkel pol. Vidare är $|f|$ begränsad i $|z| > 2$ samt uppfyller $f(1) = 0$ och $f(2) = 1$. Bestäm f.

7. Bestäm alla funktioner f som är analytiska i första kvadranten och som uppfyller villkoret $\operatorname{Re} f(z) = \psi(xy)$, där $\psi(t)$ är definierad för $t > 0$ och har kontinuerlig andraderivata.

8. Antag att f och g är två analytiska funktioner i ett öppet sammanhängande område Ω, sådana att
$$|f(z)|^2 = \operatorname{Re} g(z), \quad z \in \Omega.$$
Vad kan man säga om funktionerna f och g? (Eventuella påståenden måste bevisas!)

(V.g.v.)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
F-programmet
Komplex analys
2005–10–19

Skrivtid: 15-20 . Tillåtna hjälpmedel: Icke-symbolhanterande räknare, formelblad (på baksidan). Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje problem ger högst 5 poäng.

1. Lös fullständigt ekvationen

$$\sin z + \cos z = 2.$$

Svaret skall anges på formen $a + ib$.

2. Visa att $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + 2x$ är imaginärdelen till en analytisk funktion $f(z)$ och bestäm samtliga sådana funktioner f.

3. Bestäm konvergensradien för Taylorutvecklingen kring punkten $z = i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z^2(1 - \cos z)}{(e^{iz} - 1)^3}.$$

4. Beräkna integralerna

$$\text{a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2}\, dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{3} + \cos x}\, dx$$

5. En funktion f har som enda singularitet i $\mathbb{C}$ en enkelpol i $z = -2$ med residu 16. Vidare har f ett dubbelt nollställe i $z = 2$ och $|f(z)/z|$ är begränsad då $|z| \geq 4$. Bestäm f.

6. Visa att ekvationen $z^5 + z^2 - 16i = 0$ har alla sina rötter i området $1 < |z| < 2$.

7. Utveckla funktionen $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}$ i Laurentserie i ett område av typen $0 < |z + i| < R$. Vilket är det största möjliga värdet på R?

8. Låt f vara en analytisk funktion i $|z| < 1$ som uppfyller $f(z^2) = zf(z)$.

a) Visa att om f ej är identiskt noll så har f ett nollställe av ordning 1 i origo.
b) Visa att $f(z) = az$ för något $a \in \mathbb{C}$.

(V.g.v.)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

Lösning till problem 1: Vi skriver om ekvationen som

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=4 \Rightarrow \text{multiplicera med } 2ie^{iz}$$
$$e^{2iz}-1+i(e^{2iz}+1)=4ie^{iz} \Rightarrow (1+i)e^{2iz}-4ie^{iz}-1+i=0 \Rightarrow$$
$$e^{2iz}-2(1+i)e^{iz}+i=0 \Rightarrow \left(e^{iz}-(1+i)\right)^2=i$$

Detta ger att

$$e^{iz}=(1+i)\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+i)=(\sqrt{2}\pm 1)e^{i\pi/4}$$

och vi får

$$iz=\ln(\sqrt{2}+\pm 1)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \Rightarrow z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm 1), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Lösning till problem 2: Vi kan bestämma en funktion u sådan att $u+iv$ blier analytisk med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer. Om $v(x,y)=x^2-y^2+2xy+2x$ så ger $u_x=v_y$

$$u_x=-2y+2x \Rightarrow u=-2xy+x^2+\phi(y)$$

där ϕ beror av endast y. Nu ger den andra av Cauchy-Riemanns ekvationer, $u_y=-v_x$ att

$$-2x+\phi'(y)=-2x-2y-2 \Rightarrow \phi'(y)=-2y-2 \Rightarrow \phi(y)=-y^2-2y+C$$

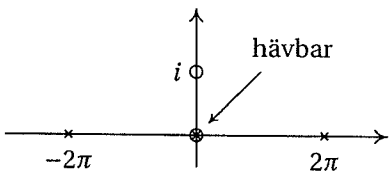
där C är en reell konstant. Nu får vi

$$f(x+iy)=u+iv=-2xy+x^2-y^2-2y+C+i(x^2-y^2+2xy+2x)$$

Sätter vi $y=0$ ser vi att $f(x)=x^2+C+i(x^2+2x)=(1+i)x^2+2iz+C$. Byter vi namn på variabeln x till z så är således $f(z)=(1+i)z^2+2iz+C$, där $C\in\mathbb{R}$.

Lösning till problem 3: Vi har nollställen i nämnaren i

$$e^{iz}=1 \Rightarrow z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$



Dessa är av ordning 3 (på grund av exponenten 3).

Vidare ser vi att nollställen i täljaren ges av

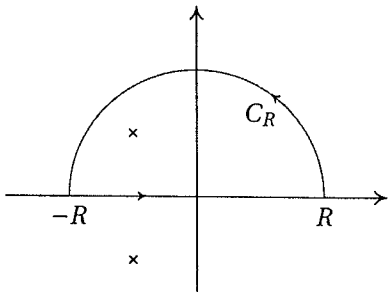
$$\cos z=1 \Rightarrow z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Dessa är av ordning 2 (varför?), men just nollstället $z=0$ kommer att ha ordning 4 i täljaren på grund av den extra faktorn z^2. Detta innebär att $z=0$ är en hävbar singulär punkt ($z=0$ blir faktiskt ett nollställe till funktionen), medan de övriga punkterna blir enkelpoler. Den närmaste singulära punkten från i är alltså $\pm 2\pi$ och konvergensradien blir

$$R=|2\pi-i|=\sqrt{4\pi^2+1}.$$

Lösning till problem 3a: Vi betraktar integralen

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}\,dz = \int_C \frac{e^{iz}}{(z+1)^2+1}\,dz$$



där C är kurvan i figuren. De singulära punkterna innanför C är en enkelpol i $z=-1+i$. Residuet i denna punkt är

$$\mathrm{Res}_{z=-1+i}\frac{e^{iz}}{(z+1)^2+1} = \frac{e^{iz}}{2(z+1)}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{e^{i(-1+i)}}{2i}$$

Residusatsen ger nu

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_C \frac{e^{iz}}{z^2+2z++1}\,dz = 2\pi i\frac{e^{-i-1}}{2i} = \pi e^{-1-i}$$

Eftersom $|e^{iz}| = e^{-y} \le 1$ i övre halvplanet kan vi uppskatta integralen över halvcirkelbågen

$$\left|\int_{C_R}\right| \le \int_{C_R}\frac{|dz|}{R^2-2R-1} = \frac{\pi R}{R^2-2R-1} \to 0 \quad \text{då } R\to\infty.$$

Om vi låter $R\to\infty$ får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-1-i} = \frac{\pi}{e}e^{-i}$$

Realdelen av detta ger integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\cos 1.$$

Lösning till problem 4b: Vi skriver om integralen som en kurvintegral över enhetscirkeln genom substitutionen $z=e^{it}$ där vi använder att $\cos t = (e^{it}+e^{-it})/2 = \frac{1}{2}(z+1/z)$ och $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$. Detta ger

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{\sqrt{3}+\cos t}\,dt = \int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}(z+1/z)}{\sqrt{3}+\frac{1}{2}(z+1/z)}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z^2+2\sqrt{3}+1)}\,dz$$

Singulära punkter finns i $z=0$ och nollställena till $z^2+2\sqrt{3}z+1=0 \Rightarrow z=-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. Endast $z=0$ och $z=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ligger innanför enhetscirkeln. Residuet i 0 är 1 och residuet i enkelpolen $z=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ blir

$$\mathrm{Res} = \frac{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+1}{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{6-2\sqrt{6}}{2(2-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)}{2(2-\sqrt{6})} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Detta ger värdet på den sökta integralen

$$2\pi i\cdot\frac{1}{i}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \pi(2-\sqrt{6}).$$

Lösning till problem 5: Vi kan skriva f på formen

$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{z+2}g(z)$$

där g är en hel funktion (och $g(2) \neq 0$). Vi ser nu att eftersom funktionen

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{(z-2)^2}{z(z+2)} \cdot g(z)$$

är begränsad för stora $|z|$ så måste g vara begränsad för stora $|z|$. Liouvilles sats säger att g är konstant C. Således är

$$f(z) = \frac{C(z-2)^2}{z+2}.$$

Vi finner att

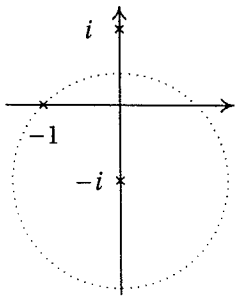
$$16 = \mathrm{Res}_{z=-2} f(z) = C \cdot (-4)^2 = 16C \Rightarrow C = 1.$$

Lösning till problem 6: Låt $f(z) = z^5 + z^2 - 16i$. Ekvationen $f = 0$ har totalt 5 rötter. På $|z| = 2$ gör vi uppdelningen $P(z) = z^5$ och $Q(z) = z^2 - 16i$. Då är $f = P + Q$ och på $|z| = 2$ är

$$|P(z)| = 2^5 = 32 \qquad \text{och} \qquad |Q(z)| \leq |z|^2 + 16 = 4 + 16 = 20$$

dvs $|P| > |Q|$. Enligt Rouchés sats har ekvationerna $f = P + Q = 0$ och $P = 0$ samma antal rötter i $|z| < 2$. Men $P = 0$ har 5 rötter där.
På $|z| = 1$ gör vi uppdelningen $P(z) = -16i$ och $Q(z) = z^5 + z^2$. Då gäller på $|z| = 1$ $|P| = 16$ och $|Q| \leq |z|^5 + |z|^2 = 2$. $P = 0$ har inga rötter, dvs $f = P + Q = 0$ har inga rötter i $|z| < 1$. På själva cirkeln $|z| = 1$ har $f = 0$ inte heller några rötter, ty $|f| = |P + Q| \geq |P| - |Q| > 0$. Således ligger alla rötter i $1 < |z| < 2$.

Lösning till problem 7: Funktionen har singulariteter i punkterna $z = -1$, $z = i$ och $z = -i$. Från figuren ser vi att den närmaste singulariteten från $-i$ är -1 på avståndet $|-i+1| = \sqrt{2}$. Vi kan således Laurentutveckla i området $0 < |z+i| < \sqrt{2}$.



Om vi sätter $w = z + i$ dvs $z = w - i$ kan vi skriva funktionen på formen (partialbråksuppdela)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+1)} = \frac{1}{w(w-2i)(w+1-i)} \\ &= \frac{1}{(1+i)w}\left[\frac{1}{w-2i} - \frac{1}{w+1-i}\right] \end{aligned}$$

som ska utvecklas i området $0 < |w| < \sqrt{2}$. Om vi använder den geometriska serien kan vi enkelt få utvecklingen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1+i)w}\left\{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(2i)^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^w}{(1-i)^{k+1}}\right\} = -\frac{1}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2i)^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{(1-i)^{k+1}}\right\} w^{k-1} \\ &= \frac{-1+i}{4w} - \frac{1}{1+i}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2i)^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{(1-i)^{k+1}}\right\} w^{k-1} \end{aligned}$$

Lösning till problem 8: f kan utvecklas i en Taylorserie i $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Det givna villkoret $f(z^2) = zf(z)$ medför att

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}$$

Om vi jämför koefficienter för olika potenser av z i dessa serier finner vi

$$\begin{array}{lll} \text{grad} & & \\ k=0 & a_0 = 0 & \\ k=1 & 0 = a_0 & \\ k=2 & a_1 = a_1 & \Rightarrow \quad a_1 \text{ godtycklig} \\ k=3 & 0 = a_2 & \\ k=4 & a_2 = a_3 & \Rightarrow \quad a_3 = 0 \end{array}$$

och om vi fortsätter finner vi alla $a_k = 0$ för $k \geq 2$.

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Källström

Prov i matematik
F-programmet
Komplex analys
2006–01–12

Skrivtid: 9–14 . Tillåtna hjälpmedel: Icke-symbolhanterande räknare, formelblad (på baksidan). Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje problem ger högst 5 poäng.

1. Lös fullständigt ekvationen

$$\tan z = -\frac{3i}{5}.$$

Svaret skall anges på formen $a + ib$.

2. Bestäm alla analytiska funktioner $f = u + iv$ som uppfyller villkoret $u(x, y) = e^{v(x,y)}$.

3. Låt

$$f(z) = \frac{z(e^{2iz} - 1)}{\sin^2 z}.$$

Bestäm konvergensradien för Taylorutvecklingen av f kring punkten $z = -i\pi$.

4. Beräkna integralerna

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 + \cos^2\theta}\, d\theta \qquad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1}\, dx$$

5. Ange Laurentutvecklingen till

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

i området $2 < |z - 3i| < 4$.

6. En funktion $f(z)$ är analytisk i $\mathbb{C}$ utom för $z = -1$ där den har en enkel pol. Vidare är f begränsad i $|z| > 2$ och uppfyller $f(1) = 0$ samt $f(2) = 1$. Bestäm f.

7. Avgör i vilka kvadranter eller på vilka halvaxlar rötterna tilll ekvationen $z^4 - iz + i = 0$ ligger.

8. Visa att det inte finns någon funktion f analytisk i $|z < 2$, sådan att

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{(-1)^k}{k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

(V.g.v.)

Trigonometriska formler

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$\sin x\sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x\cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})$$

Lösning till problem 1: Vi skriver om ekvationen enligt

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} = -\frac{3i}{5} \Rightarrow 5(e^{2iz} - 1) = 3(e^{2iz} + 1)$$

Detta ger att

$$e^{2iz} = 4 \Rightarrow 2iz = \ln 4 + i \cdot 2k\pi \Rightarrow z = -i\ln 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösning till problem 2: Om $f = u + iv$ och $u = e^v$ så får vi genom derivering

$$\begin{cases} u_x = e^v v_x \\ u_y = e^v v_y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_{xx} = e^v v_x^2 + e^v v_{xx} \\ u_{yy} = e^v v_y^2 + e^v v_{yy} \end{cases}$$

Addition ger att $\Delta u = e^v(v_x^2 + v_y^2) + e^v \Delta v$. Men eftersom u och v är harmoniska så är $\Delta u = \Delta v = 0$ och alltså är $v_x^2 + v_y^2 = 0$. Då måste $v = C$ (konstant). Detta ger att $f = e^C + iC$.

Lösning till problem 3: Nollställen i täljaren då $e^{2iz} = 1 \Rightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dessa är alla enkla, utom nollstället $z = 0$ som är dubbelt (p.g.a. faktorn z).

Nollställena i nämnaren ges också av $\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi$. Dessa är alla dubbla (p.g.a. $\sin^2$). Detta gör att $z = 0$ blir en hävbar singularitet, medan $z = k\pi$ $(k \neq 0)$ blir enkelpoler till funktionen. Konvergensradien i Taylorutvecklingen kring punkten $-i\pi$ är avståndet till närmaste singularitet, t.ex. $z = \pi$ vilket ger konvergensradien $R = |\pi - (-i\pi)| = |\pi(1+i)| = \pi\sqrt{2}$.

Lösning till problem 4a: Vi skriver om integralen som

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)}\, d\theta = \int_0^\pi \frac{2\cos 2\theta}{3 + \cos 2\theta}\, d\theta \quad \begin{bmatrix} \phi = 2\theta \\ d\phi = 2\,d\theta \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{3 + \cos\phi}\, d\phi$$

$$\begin{bmatrix} z = e^{i\phi} \\ d\phi = dz/iz \end{bmatrix} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{3 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6z + 1)}\, dz$$

Singulära punkter i $z = 0$ (enkelpol) och i $z^2 + 6z + 1 = 0$ vilket ger $z = -3 + \sqrt{8}$ (enkelpol) innanför enhetscirkeln. Vi beräknar

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6z + 1)} = \left.\frac{z^2 + 1}{z^2 + 6z + 1}\right|_{z=0} = 1$$

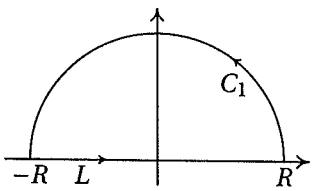
$$\operatorname{Res}_{z=\sqrt{8}-3} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 6z + 1)} = \left.\frac{z^2 + 1}{z(z + 3 + \sqrt{8})}\right|_{z=\sqrt{8}-3} = \frac{(\sqrt{8} - 3)^2 + 1}{(\sqrt{8} - 3) \cdot 2\sqrt{8}} = \frac{18 - 6\sqrt{8}}{16 - 6\sqrt{8}} = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

Residusatsen ger nu att

$$I = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{8}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{3}{\sqrt{8}}\right).$$

Lösning till problem 4b: Vi betraktar integralen

$$\int_C \frac{ze^{iz}}{z^2 + z + 1}\, dz$$



längs kurvan $C = L + C_1$ enligt figur. Singulära punkter i $z^2 + z + 1 = 0$ vilket ger $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ innanför C. Detta är en enkelpol med residu

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} = \left.\frac{ze^{iz}}{z+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\right|_{z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})e^{-i/2-\sqrt{3}2}}{i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2}\right)$$

Vi får nu med residusatsen

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^2+x+1}\,dx+\int_{1}C\frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2}\right)$$

När vi låter $R\to\infty$ så går $\int_{C_1}\to 0$ enligt Jordans lemma och vi ser

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2}\right)$$

Den sökta integralen får vi om vi betraktar imaginärdelen av detta resultat.

Lösning till problem 5: Vi partialbråksuppdelar funktionen

$$f(z)=\frac{z}{(z+i)(z-i)}=\frac{1/2}{z+i}+\frac{1/2}{z-i}$$

och sätter sedan $w=z-3i$ vilket ger $z=w+3i$ och funktionen blir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w+4i}+\frac{1}{w+2i}\right).$$

Denna funktion utvecklas i $2<|w|<4$ med hjälp av den geometriska serien som

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w+4i}+\frac{1}{w+2i}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{4i}\right)^k+\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{w}\right)^k\right]$$

Lösning till problem 6: Om vi sätter $g(z)=f(z)(z+1)$ så blir g en hel funktion och för stora $|z|$ gäller att

$$|g(z)|=|f(z)(z+1)|\le M(1+|z|)$$

dvs g växer i ∞ som ett förstagradspolynom. Den generaliserade Liouvilles sats säger att g måste vara ett förstagradspolynom, $g(z)=a+bz$. Detta ger $f(z)=\dfrac{a+bz}{z+1}$. Villkoren $f(1)=0$ och $f(2)=1$ ger

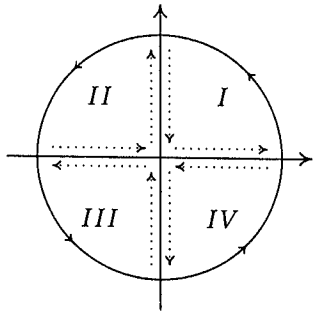
$$\begin{cases}a+b=0\\a+2b=3\end{cases}\implies\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$$

Den sökta funktionen är alltså $f(z)=\dfrac{3(z-1)}{z+1}$.

Lösning till problem 7: Sätt $f(z)=z^4-iz+i$. Vi har en polynomnekvation $f(z)=0$ av grad 4 och således finns 4 rötter. Eftersom koefficienterna inte är reella i polynomet kan vi inte vara säkra på att rötter förekommer parvis komplex-konjugerade.

Det finns inga rötter på axlarna, ty på reella axeln är $z=x$ och $f(x)=x^4+i(1-x)=0$ vilket inte är sant för något reellt x. På imaginära axeln är $f(iy)=y^4+y+i$ vilket också är skilt från 0.

För stora värden på radien blir argumentvariationen på varje kvartscirkel i fuguren $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Vi kontrollerar argumentvariationen längs axlarna. På rella axeln är $\arg f(x) = \arg(x^4 + i(1-x)) = \arctan \frac{1-x}{x^4}$. Detta ger



	$-\infty$		0		1		∞
$\frac{1-x}{x^4}$	0	$+$	$+\infty/\infty$	$+$	0	$-$	0
$\arg f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow\nearrow$	0

Vi får på motsvarande sätt på imaginära axeln $\arg f(iy) = \arg(y^4 + y + i) = \arctan \frac{1}{y^4 + y}$ och

	$-\infty$		-1		0		∞
$\frac{1}{y(y^3+1)}$	0	$+$	$\infty/-\infty$	$-$	∞/∞	$+$	0
$\arg f(iy)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Detta ger för argumentvariationen i de olika kvadranterna

$$\mathrm{Var}_I \arg f = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow N = 1$$
$$\mathrm{Var}_{II} \arg f = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow N = 1$$
$$\mathrm{Var}_{III} \arg f = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow N = 1$$
$$\mathrm{Var}_{IV} \arg f = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow N = 1$$

Lösning till problem 8: Om vi tittar på jämna k ($k = 2m$) så blir

$$f\left(\frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2m}$$

Om singulariteten i $z = 0$ vore hävbar skulle $f(z)$ överensstämma med funktionen z i en punktföljd $z_m = 1/2m$ som konvergerar mot en inre punkt analyticitetsområdet (i detta fall punkten 0). Men i så fall skulle $f(z) = z$. Detta strider mot att för udda k är $f(1/k) = -1/k$. Singulariteten i $z = 0$ kan inte vara hävbar.

Den kan inte heller vara en pol ty i så fall måste $|f(z)| \to \infty$ då $z \to 0$. Men detta är inte sant för punktföljden $1/k$. Således måste singulariteten vara väsentlig.