

Problem om Induktion

1. Visa att $(2n)!/2^n$ är ett heltal om $n \in \mathbf{N}$.
2. Visa att summan av den n första udda, positiva naturliga talen är n^2 .
3. Visa att alla heltal som är större än eller lika med 12 kan skrivas som en summa av treor och femmor.
4. Visa följande formel med induktion:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

5. Visa att olikheten $n! > 2^n$ gäller för alla heltal ≥ 4 .
6. Visa att $6|(8^n - 2^n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
7. Visa följande formel med induktion:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

8. Visa att varje heltal ≥ 14 kan skrivas som en summa av åttor och treor.
9. Visa att ett tal som består av 3^n lika siffror är delbart med 3^n .
10. Visa formeln

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

11. Fibonaccitalen F_n definieras genom:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Visa med induktion att vi för alla $n \geq 0$ har

$$\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

12. Definiera de *harmoniska talen*, H_k genom att sätta

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Visa att om $n \geq 0$ så gäller $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.

Gunnar