

5.6. Kardinaltal

Stig Christofferson & Domar
Växjö

Logik
Mängdlära
Algebra

Gleerups
1970

Låt A och B vara två mängder. Man säger att de har samma mäktighet (samma kardinalitet) om det finns en bijektion från A till B , och vi betecknar detta $A \approx B$.

Nu skall vi visa att följande gäller, där A , B och C är godtyckliga mängder.

- (r) $A \approx A$,
- (s) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$,
- (t) $(A \approx B) \wedge (B \approx C) \Rightarrow A \approx C$.

(r) är en följd av att den identiska avbildningen av A är en bijektion från A till A .
(s) följer av att om f är en bijektion från A till B så är f^{-1} en bijektion från B till A .
Och (t) slutligen följer av att en bijektion f från A till B och en bijektion g från B till C kan sammansättas till en bijektion $g \circ f$ från A till C (övning 5.3.3).

Vi har alltså visat att symbolen $\approx$ uppfyller de tre egenskaper som man behöver för att kunna införa en ekvivalensrelation. Den mängd på vilken man lämpligen skulle vilja definiera en ekvivalensrelation genom begreppet samma mäktighet är mängden M av alla mängder överhuvudtaget. Enligt den axiomatiska mängdläran är detta egentligen ingen tillåten mängd (se 3.3), men vi tillåter oss ändå att i det här sammanhanget använda mångdbegreppet. Det går att visa att det resonemang som vi kommer att föra kan helt legitimeras i den axiomatiska mängdläran.

Vi har alltså en ekvivalensrelation på M , och således en indelning i ekvivalensklasser. En ekvivalensklass kallas ett kardinaltal.

Det är lätt att inse att en av ekvivalensklasserna endast innehåller mängden $\emptyset$. För detta kardinaltal har man infört beteckningen 0. En annan ekvivalensklass består av alla mängder av typen $\{a\}$, alltså mängder med endast ett element, och det kardinaltalet kallas 1. Mängderna av typen $\{a, b\}$ bildar också ett kardinaltal som betecknas 2, klassen av mängder $\{a, b, c\}$ är ett kardinaltal som betecknas 3.

Vi skall nu införa vissa operationer och relationer för kardinaltalen. Om x och y är kardinaltal, låter vi E och F vara mängder med kardinalitet x respektive y (d.v.s. innehållna i ekvivalensklassen x respektive ekvivalensklassen y). Vi förutsätter att E och F är disjunkta och bildar sedan $E \cup F$. Man kan visa att kardinaliteten z hos $E \cup F$ är oberoende av det speciella valet av E och F (exempel 5.6.1.) Man definierar nu $x + y = z$, varmed vi har infört en summa av två godtyckliga kardinaltal.

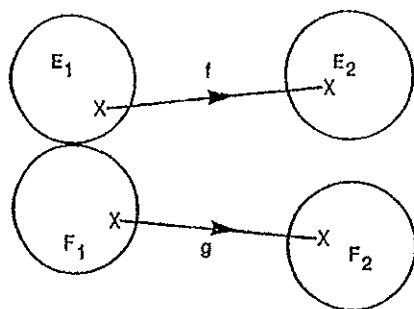
Man kan också definiera ett tal som betecknas xy och kallas produkten av x och y . Man väljer då E och F med kardinalitet x respektive y och definierar xy som kardinaliteten hos $E \times F$. Man kan nämligen visa att den är oberoende av det speciella valet av E och F (övning 5.6.2). Man kan sedan lätt visa att om vi har en mängd med kardinalitet x , vilkens element är parvis disjunkta mängder, alla med kardinalitet y , så är unionen av dessa senare mängder en mängd med kardinalitet xy .

Man inför vidare $x \leq y$ som beteckning för utsagan att det finns ett kardinaltal z så att $x + z = y$. Symbolen $\leq$ utläses »mindre än eller lika med». Man kan visa att man härigenom får en linjär ordning, t.o.m. en välordning av kardinaltalen (se 5.4 beträffande dessa begrepp).

Vissa kardinaltal har egenskapen att motsvarande mängder aldrig kan ha samma mäktighet som någon av deras äkta delmängder. Dessa kardinaltal kallas naturliga tal och motsvarande mängder kallas ändliga. Övriga mängder kallas oändliga.

Genom detta har vi skisserat den moderna definitionen av begreppet naturligt tal. De införda additions- och multiplikationsoperationerna svarar exakt mot de välkända taloperationerna på $\mathbb{N}$, motsvarande gäller om ordningsrelationen. Utgående från den här definitionen har man nu möjlighet att visa alla de kända egenskaperna för de naturliga talen. Induktionsaxiomet i version III (3.5) är således en följd av välordningen, som givetvis måste medföra att också $\mathbb{N}$ är välordnad.

EXEMPEL 5.6.1. Visa att om $E_1 \approx E_2$ och $F_1 \approx F_2$ och om $E_1 \cap F_1 = \emptyset$ och $E_2 \cap F_2 = \emptyset$, så gäller att $E_1 \cup F_1 \approx E_2 \cup F_2$.



Bevis. Enligt förutsättningen finns en bijektion f från E_1 till E_2 och en bijektion g från F_1 till F_2 . På hela $E_1 \cup F_1$ kan vi då definiera en funktion h genom föreskriften

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x), & \text{om } x \in E_1, \\ h(x) &= g(x), & \text{om } x \in F_1. \end{aligned}$$

Således är h en sorts kombination av de två funktionerna. Det är lätt att visa att h är en bijektion, varav påståendet följer. ■

ÖVNING 5.6.2. Visa att om $E_1 \approx E_2$ och $F_1 \approx F_2$ gäller att $E_1 \times F_1 \approx E_2 \times F_2$.

5.7. Oändliga mängder

De kardinaltal som inte är naturliga tal kallar vi oändliga kardinaltal. Ett sådant är kardinaltalet för den ekvivalensklass i vilken mängden $\mathbb{N}$ ingår. Det kallas $\aleph_0$ (alef noll) och man kan visa att det är det minsta oändliga kardinaltalet. Att en mängd E har mäktigheten $\aleph_0$ innebär att man kan bijektivt avbilda mängden på $\mathbb{N}$. Vid en sådan bijektion kommer varje element i E att svara mot ett $n \in \mathbb{N}$, d.v.s. mängden kan betecknas $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Mängden kan således numreras och man kallar därför mängderna med kardinaliteten $\aleph_0$ för numererbara, alternativt uppräknliga.

Vi skall visa två satser om numererbarhet.

SATS 5.7.1. $\mathbb{Q}$ är numererbar.

Bevis. Vi kan förse de rationella talen med nummer enligt följande princip. Varje rationellt tal kan entydigt skrivas p/q eller $-p/q$, där $p \in \mathbb{N}$ och $q \in \mathbb{Z}_+$, och där vi har förkortat så långt som möjligt. Vi väljer först de tal där $p+q$ är lägst, d.v.s. 1, därefter de tal där $p+q$ är näst lägst, d.v.s. 2 etc. Alltså $0/1$, $1/1$, $-1/1$, $2/1$, $-2/1$, $1/2$, $-1/2$, $3/1$ etc. Alla rationella tal kommer då med i denna uppräknings och $\mathbb{Q}$ kan därför numreras. ■

SATS 5.7.2. $\mathbb{R}$ är inte numererbar.

Bevis. Vi använder den indirekta bevismetoden och utgår därför från att vi har en numrering. Vi skriver varje reellt tal i form av ett ändligt eller oändligt decimalbråk och ställer upp hela $\mathbb{R}$ i nummerordning på följande sätt.

5.7.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_2, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_3, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

där alltså alla a_p är heltal och alla a_{pq} är ensiffriga naturliga tal.

Vi betraktar nu »diagonalen» $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ och bildar ett nytt decimalbråk

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

som vi bestämmer så att vi för alla $p \in \mathbb{Z}_+$ väljer

$$\begin{array}{ll} b_p = 1, & \text{om } a_{pp} = 0, \\ b_p = 0, & \text{om } a_{pp} \neq 0. \end{array}$$

Det gäller nu att b inte kan överensstämma med något av talen i uppställningen. Ty om det skulle överensstämma med tal nummer q skulle det innebära att vi måste ha samma decimal i position q för båda talen d.v.s.

$$a_{qq} = b_q,$$

vilket inte gäller.

Härigenom har vi funnit att man kan finna ett tal b som inte är med i uppräkningsen. Men vi utgick ifrån att det var en uppräkningsen av alla reella tal. Genom denna motsägelse följer satsen. ■

Vi vill slutligen påpeka att sats 5.7.2 först uppställdes och visades av Cantor, och bevismetoden brukar beskrivas som Cantors diagonalförfarande. Satsen innebär tydligen att det finns andra oändliga kardinaltal än $\aleph_0$. I själva verket finns det oändligt många oändliga kardinaltal.

ÖVNING 5.7.3. Visa att $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

ÖVNING 5.7.4. För varje $n \in \mathbb{N}$ är E_n en numrerbar mängd. Visa att

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

är en numrerbar mängd.

ÖVNING 5.7.5. Visa att mängden av delmängder av $\mathbb{N}$ är en numrerbar mängd.