UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen
BASKURS I MATEMATIK
2009-10-02

Skrivtid: 8-13. Inga hjälpmedel tillåtna. Maxpoäng på varje uppgift är 5 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För betyg 3 (eller 4 resp. 5) krävs minst 18 (eller 25 resp. 32) poäng. Om du är godkänd på duggan, ska du inte lämna in uppgift 1.

1. Lös olikheten $\quad 1 < \left|\dfrac{2+x}{3-x}\right|$.

2. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ för $n = 2$.

   (b) Bevisa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

   för alla heltal $n \geq 1$.

3. Lös ekvationen $\log_{100}(x-6) + 1 = \log_{10}(x-30)$.

4. Lös ekvationen $\cos 2x - \sin 4x = 0$.

5. Låt 4 olika vokaler och 5 olika konsonanter vara givna.
   (a) Hur många 5-bokstaviga "ord" med 2 olika vokaler och 3 olika konsonanter kan bildas av de givna bokstäverna?
   (b) Hur många ord kan bildas om man dessutom kräver att de två vokalerna inte får stå bredvid varandra?

6. Skriv det komplexa talet $\dfrac{(1-i)^{17}}{(1+i\sqrt{3})^9}$ på formen $a + bi$ där a och b är reella tal.

7. (a) Beräkna avståndet mellan punkterna $(6, -1)$ och $(-2, 3)$ samt ange ekvationen för linjen genom dessa punkter.
   (b) Bestäm typen av samt skissa kurvan $36x^2 + y^2 + 72x - 8y + 43 = 0$ i talplanet. Skissen skall tydligt visa kurvans form och läge i planet.

8. Ekvationen $z^4 + 4z^3 - 3z^2 - 26z - 10 = 0$ har roten $i - 3$. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL !

SVAR till tentan i Baskurs 2009-10-02

1. $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 3$.

2. (a) $\frac{5}{24}$. (b) Utför bas, induktionsantagande, induktionssteg, samt dra slutsats med hjälp av induktionsaxiomet.

3. $x = 150$.

4. $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$ eller $x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) 7 200 ord. (b) 4 320 ord.

6. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

7. (a) Avståndet är $4\sqrt{5}$. Linjens riktningskoefficient är $k = \frac{-1-3}{6+2} = -\frac{1}{2}$.
   En ekvation för linjen är $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
   (b) Ellips med mittpunkten $(-1, 4)$ och halvaxellängderna $\frac{1}{2}$ i x-led och 3 i y-led.

8. Rötterna är $-3 \pm i$ och $1 \pm \sqrt{2}$.

Lösningsförslag till några av uppgifterna

1. Olikheten är ekvivalent med $\frac{2+x}{3-x} < -1$ ELLER $\frac{2+x}{3-x} > 1$. Vi söker alla x som uppfyller *minst en av* olikheterna (A): $\frac{2+x}{3-x} < -1$ och (B): $\frac{2+x}{3-x} > 1$. Båda löses genom att göra 0 på ena sidan, faktorisera och teckenstudera.
   (A) är ekvivalent med $\frac{2+x}{3-x} + \frac{3-x}{3-x} < 0$, dvs med $\frac{5}{3-x} < 0$, dvs med $3 - x < 0$.
   Alltså gäller $(A) \iff x > 3$.
   På liknande sätt får vi att $(B) \iff \frac{2x-1}{3-x} > 0$. Gör teckenstudietabell: Intressanta punkter att ha med i teckenstudietabellen (punkter där tecknet kan ändras): $x = \frac{1}{2}$ och $x = 3$.

x		$\frac{1}{2}$		3	
$2x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{2x-4}{3-x}$	$-$	0	$+$	odef	$-$

   Vi ser att (B) gäller om och endast om $\frac{1}{2} < x < 3$.
   Den givna olikheten gäller om och endast om (A) eller (B), dvs om och endast om $x > 3$ *eller* $\frac{1}{2} < x < 3$, vilket kan skrivas $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 3$.

2b. Bas: $VL_1 = \frac{1}{6}$, och $HL_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, så påståendet stämmer för $n = 1$.

Induktionsantagande (I.A.): $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)(p+2)}$,

dvs. $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

Induktionssteg: Vi måste visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har

$$
\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = VL_p + \frac{1}{(p+1)(p+1+1)(p+1+2)} \\
&= [enligt\ I.A.] = HL_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \left(\frac{p+3}{2(p+1)(p+2)(p+3)} - \frac{2}{2(p+1)(p+2)(p+3)} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{p+1}{2(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(p+2)(p+3)} = HL_{p+1}.
\end{aligned}
$$

Enligt induktionsaxiomet följer nu att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$. VSB.

3. För att logaritmerna i ekvationen ska vara definierade krävs att både $x - 6$ och $x - 30$ är positiva. Alltså måste $x > 30$.

Metod 1: Gå över till $\log_{10}$ genom att använda basbytesregeln:.

$$\log_{100}(x-6) = \frac{\log_{10}(x-6)}{\log_{10} 100} = \frac{1}{2} \log_{10}(x-6).$$

Ekvationen kan nu skrivas $\log_{10}(x-6) + 2 = 2\log_{10}(x-30)$, vilket är ekvivalent med (för $x > 30$) att

$$\log_{10} \frac{(x-30)^2}{x-6} = 2,$$

dvs $\frac{(x-30)^2}{x-6} = 100$. Denna andragradsekvation har rötterna $x = 150$ och $x = 10$. Eftersom $x > 30$ måste roten $x = 10$ förkastas. Svar: $x = 150$.

Metod 2: Sätt $A = \log_{100}(x-6)$, och $B = \log_{10}(x-30)$. Ekvationen säger att $B = A + 1$, och def av logaritmer ger att $100^A = x - 6$ och $10^B = x - 30$. Vi har alltså

$$x = 100^A + 6 = (10^2)^A + 6 = 10^{2A} + 6 = (10^A)^2 + 6$$

och

$$x = 10^B + 30 = 10^{A+1} + 30 = 10 \cdot 10^A + 30,$$

och alltså måste $(10^A)^2 + 6 = 10 \cdot 10^A + 30$. Denna andragradsekvation med obekant 10^A har lösningarna $10^A = 12$ och $10^A = -2$. Eftersom den senare är orimlig måste den förkastas. Alltså är $10^A = 12$, och vi får $x = (10^A)^2 + 6 = 12^2 + 6 = 150$.

4. Ekvationen kan skrivas $\cos 2x\,(1 - 2\sin 2x) = 0$, vilket är ekvivalent med att $\cos 2x = 0$ eller $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Vi har

$\cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, och

$\sin 2x = \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ eller $2x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$.
Svar: $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{\pi}{12} + n\cdot\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{12} + n\cdot\pi$.

5. (a) Välj först 2 vokaler på $\binom{4}{2} = 6$ sätt, och därefter 3 konsonanter på $\binom{5}{3} = 10$ sätt. Permutera sedan de 5 bokstäverna på 5! sätt. Multiplikationsprincipen ger svaret $6 \cdot 10 \cdot 5! = 7200$.
(b) Välj vokaler på 6 sätt och konsonanter på 10 sätt (som i uppgift (a)). Det finns $\binom{5}{2} = 10$ sätt att välja 2 platser för vokalerna, men av dessa är 4 val förbjudna, så vi kan välja platser för vokalerna på $10 - 4 = 6$ sätt. Sätt ut vokalerna på de 2 valda platserna på 2! sätt, och sätt ut konsonanterna på 3! sätt. Med multiplikationsprincipen får vi nu svaret $6 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 4320$.

6. Notation: Skriv $\Theta \equiv \alpha$ om Θ och α är argument för samma komplexa tal, dvs skiljer sig åt med ett antal hela varv.
Talet $1-i$ har belopp $\sqrt{2}$ och argument $-\frac{\pi}{4}$. Enligt de Moivres formel har $(1-i)^{17}$ beloppet $(\sqrt{2})^{17} = 2^8\sqrt{2}$ och argument $-17 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{16\pi + \pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$.
Talet $1+i\sqrt{3}$ har belopp 2 och argument $\frac{\pi}{3}$, så $(1+i\sqrt{3})^9$ har belopp 2^9 och argument $9 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi \equiv \pi$.
Det givna talet har alltså belopp $\frac{2^8\sqrt{2}}{2^9} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och argument $-\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}$, och kan alltså skrivas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

7. Efter kvadratkomplettering får man $36(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$, vilket efter förkortning med 9 kan skrivas som

$$\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1.$$

Från denna ekvation kan man utläsa att kurvan är en ellips med centrum i punkten $(-1, 4)$ och halvaxellängderna $\frac{1}{2}$ i x-led och 3 i y-led. Rita själv.

8. Låt $f(z)$ vara polynomet i ekvationens vänsterled. Ekvationen har endast reella koefficienter, så både $-3+i$ och $-3-i$ är nollställen till $f(z)$. Enligt faktorsatsen har $f(z)$ faktorn $(z-(i-3))(z-(-i-3)) = (z+3-i)(z+3+i) = z^2+6z+10$. Ansätt att $z^4 + 4z^3 - 3z^2 - 26z - 10 = (z^2+6z+10)(z^2+Az+B)$. Konstanttermerna lika ger att $-10 = 10B$, dvs $B = -1$. Att z^3-termerna är lika ger att $4 = A + 6$, vilket ger $A = -2$. Vi har nu

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff z^2 + 6z + 10 = 0 \text{ eller } z^2 - 2z - 1 = 0 \\ &\iff z = -3 \pm i \text{ eller } z = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$