

1. Kvadrera båda led och få andragradsekvationen

$$3x - 2 = x^2 - 4x + 4$$

som har rötterna $x = 1$ och $x = 6$. Dessa måste provas i den givna ekvationen. För $x = 1$ får vi högerledet 1 och vänsterledet $1 - 2 = -1$. Så $x = 1$ är inte en lösning. För $x = 6$ har vi högerledet $\sqrt{16} = 4$ och högerledet blir $6 - 2 = 4$, så $x = 6$ är en lösning.

SVAR: $x = 6$.

2. Olikheten skrivs

$$\frac{16 - x^2 - x}{x + 1} - \frac{7x + 7}{x + 1} < 0$$

vilket kan förenklas till

$$\frac{x^2 + 8x - 9}{x + 1} > 0,$$

dvs

$$\frac{(x - 1)(x + 9)}{x + 1} > 0.$$

Teckenstudera! Intressanta punkter: $x = -9$, $x = -1$ och $x = 1$.

Man får svaret $-9 < x < -1$ eller $x > 1$.

3. Vi börjar med att observera att argumentet till logaritmfunktionerna måste vara positivt, så vi måste ha $x > 0$.

Metod 1: Använd formeln för basbyte: $\log_{25}(x + 2) = \frac{\log_5(x + 2)}{\log_5 25} = \frac{\log_5(x + 2)}{2}$.

Nu kan ekvationen skrivas

$$\frac{\log_5(x + 2)}{2} = \log_5(x),$$

vilket kan skrivas $\log_5(x + 2) = 2 \log_5(x)$, dvs. $\log_5(x + 2) = \log_5(x^2)$. Detta är för $x > 0$ ekvivalent med att $x + 2 = x^2$. Ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ har rötterna $x = -1$ och $x = 2$. Eftersom $x = -1$ inte passar i ekvationen (vi skulle ju ha $x > 0$), måste det värdet uteslutas. Övning: Kontrollera att $x = 2$ uppfyller ekvationen.

Metod 2: Sätt $A = \log_{25}(x + 2)$. Enligt ekvationen gäller också $A = \log_5(x)$. Alltså har vi $x + 2 = 25^A = (5^2)^A$ och $x = 5^A$. Så $x = (5^2)^A - 2 = 5^A$. Eftersom $x = 5^A$ har vi andragradsekvationen $x^2 - x - 2 = 0$, med rötterna $x = -1$ och $x = 2$. Värdet $x = -1$ måste förkastas eftersom $x = 5^A > 0$. Så $x = 2$.

SVAR: $x = 2$.

4. a) SVAR: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$, som också kan skrivas $4x + 5y = 6$.

b) SVAR: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

c) Kvadratkomplettera!

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 8 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 2 = 0$$

så ekvationen kan skrivas

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

och det är ekvationen för cirkeln med medelpunkten $(3, -1)$ och radie $\sqrt{2}$.