Ytterligare problem om Induktion

1. Visa att $(2n)!/2^n$ är ett heltal om $n \epsilon \mathbf{N}$.

2. Visa att summan av de n första udda, positiva naturliga talen är n^2.

3. Visa följande formel med induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

4. Visa att olikheten $n! > 2^n$ gäller för alla heltal ≥ 4.

5. Visa följande formel med induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

6. Visa formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

7*. Fibonaccitalen F_n definieras genom:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Visa med induktion att vi för alla $n \geq 0$ har

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

8*. Definiera de *harmoniska talen,* H_k genom att sätta

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{k}, \quad k \epsilon \mathbf{Z}_+.$$

Visa att om $n \geq 0$ så gäller $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.

Gunnar