

PROBLEM I KOMBINATORIK

Multiplikationsprincipen

1. I en förening med nitton medlemmar skall man utse en styrelse bestående av ordförande, sekreterare och kassör. På hur många sätt kan denna styrelse se ut?
2. Givet siffrorna 1, 2, 4, 5, och 7 skall man bilda tresiffriga tal och endast använda varje siffra högst en gång. På hur många sätt kan det ske
 - a) överhuvudtaget?
 - b) om talet skall vara udda?
 - c) om talet skall vara delbart med fem?
3. Hur många olika val kan man göra ur en skål innehållande fem (identiska) äpplen och åtta (identiska) apelsiner?
4. Hur många femsiffriga tal med idel olika siffror kan man bilda om
 - a) siffran 1 skall vara med direkt följd av 2,
 - b) siffrorna 1 och 2 skall vara med, men ej nödvändigtvis bredvid varandra?
5. Hur många "ord" med en till fem bokstäver kan bildas med användande av bokstäverna i ordet ASTER ?
6. Hur många ord med fyra bokstäver kan man bilda med användande av bokstäverna i ordet SAMOVAR ?

Binomialkoefficienter

7. Givet är 20 punkter i planet sådana att tre av dem aldrig ligger i rät linje. Hur många trianglar kan man bilda med hörn i de givna punkterna?
8. En kortlek (52 kort) är uppdelad i två buntar med 20 resp. 32 kort. På hur många sätt kan slutresultatet se ut när de två buntarna skjuts in i varandra?
9. På hur många sätt kan man ställa tolv personer i rad så att personerna A,B,C och D alltid har samma inbördes ordning?
10. En brevbärare har femton brev, adresserade till femton olika adressater. På hur många sätt kan han lämna breven så att exakt tre av dem kommer fel?
11. Visa med kombinatoriskt resonemang:

$$\binom{3n}{3} = 3 \cdot \binom{n}{3} + 6n \cdot \binom{n}{2} + n^3.$$

12. Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} \Leftrightarrow n = 2k + 1.$$

Binomialsatsen

13. Bestäm koefficienten för x^5 i utvecklingen av $(2x + 3)^8$.

14. Finns i utvecklingen av $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{32}{x^8}\right)^{30}$ någon konstant term? Bestäm den i så fall.

15. Bevisa att

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n, \quad n \geq 0.$$

16. Förenkla uttrycket

$$\sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k}.$$

Gunnar