

Inledning.

Vilka olika talområden finns det? Jag gör en snabb genomgång av vad ni tidigare stött på, bl.a. för att repetera standardbeteckningarna för de olika talmängderna.

- *Positiva heltal*, $\mathbf{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- *Naturliga tal*, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- *Heltal*, $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.
- *Rationella tal (bråktal)*, $\mathbf{Q} = \{m/n; m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_+\}$.
- *Reella tal*, $\mathbf{R} = \{\text{Ändliga eller oändliga decimalbråk}\}$.

Här kommer jag att behandla talsystemets höjd - och (i viss mening) slutpunkt, de komplexa talen. Dessa levde en slags skuggtillvaro under ca. 300 år (1500 till 1800), man tyckte inte om dem, de existerade bara "i fantasin" (var finns de andra talen då?), men dök ändå hela tiden upp i räkningar, i ekvationslösning och inom analysen. Man upptäckte med deras hjälp en mängd gåtfulla samband som t.ex. mellan trigonometriska funktioner och exponentialfunktionen. Det var först i och med att man fann ett sätt att *geometriskt* illustrera de komplexa talen (se avsnitt 2) och operationerna med dem (Caspar Wessel i Norge, Argand i Frankrike och Gauss i Tyskland, alla kring år 1800), som de kunde erfaras som mer konkreta och "existerande". En *logiskt* invändningsfri framställning kom dock inte förrän William Hamilton (1837) kom på att man kunde representera komplexa tal som par av reella tal. Denna framställning bygger alltså på de reella talen och en invändningsfri framställning av dessa kom i sin tur först ett tjugotal år senare, uppenbarligen "kände man på sig" att dessa verkligen existerade ändå, kanske främst för att de kunde ses som punkter på en tallinje. Historiskt sett finns det förresten ett intimt samband mellan tänkandet kring de komplexa talen och *vektorbegreppet*, även här spelade Hamilton en avgörande roll.

1. Presentation av de komplexa talen.

Ett komplext tal har formen $z = a + bi$, där a och b är reella tal och symbolen i betecknar ett objekt med egenskapen $i^2 = -1$. Man skriver ibland $i = \sqrt{-1}$ vilket är litet problematiskt.¹ Hur som helst, först gäller det att kunna utföra de mest fundamentala aritmetiska operationerna (addition, subtraktion, multiplikation och division), kort sagt att kunna *räkna* med de komplexa talen, utan att nödvändigtvis begripa vad man gör - förståelse kommer ju ofta efteråt (eller så vänjer man sig vid att ej begripa), och den första regeln är helt enkelt att man kan räkna "som vanligt" - bara man håller i minnet att $i^2 = -1$, så att högre potenser av i än den första kan fås att försvinna. Så gäller t.ex. att $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.

Övning 1. Skriv upp de successiva potenserna av i för att upptäcka det mönster som uppkommer. När du funnit detta mönster kommer du att kunna beräkna "alla" potenser av i som t.ex. i^{2911} .

¹Om a är ett positivt reellt tal så betecknar \sqrt{a} det *positiva* reella tal vars kvadrat är a men det är omöjligt att dela upp de komplexa talen i positiva och negativa så att de "vanliga" räknereglerna gäller. För ett reellt tal gäller ju att det antingen är positivt, negativt eller noll, vidare vet vi att produkten av två positiva (negativa) tal är positiv. Om samma sak skulle gälla för de komplexa talen så skulle speciellt i vara positivt eller negativt - fallet noll kan vi utesluta. Men nu är ju $i \cdot i = -1$ så räkneregeln ovan gäller ej vare sig i skulle vara positivt eller negativt!

Exempel 1. Om $z = 2 - i$ och $w = 5 + 3i$, beräkna $z + w$ och $z \cdot w$.

Vi har:

$$z + w = (2 - i) + (5 + 3i) = (2 + 5) + (-i + 3i) = 7 + 2i$$

och

$$z \cdot w = (2 - i) \cdot (5 + 3i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (3i) + (-i) \cdot 5 + (-i) \cdot 3i = 10 + 6i - 5i - 3 \cdot i^2 = 13 + i.$$

Innan vi visar hur man dividerar två komplexa tal är det praktiskt att införa några fundamentala begrepp. Låt $z = a + ib$ vara ett komplext tal.

- *Realdelen* för z är då a , man skriver $Re(z) = a$.
- *Imaginärdelen* för z är b vilket skrivs $Im(z) = b$.
- *Konjugaten* till z är $a - bi$ som skrivs $\bar{z} = a - bi$.
- *Beloppet* av z , skrivs $|z|$ och ges av $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exempel 2. Låt $z = -2 + 5i$. Då är:

$$\begin{cases} Re(z) = -2, \\ Im(z) = 5, \\ \bar{z} = -2 - 5i, \\ |z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}. \end{cases}$$

Observera till att börja med att imaginärdelen är ett *reellt* tal, nämligen det tal som står tillsammans med i . Vidare ser man att beloppet av ett komplext tal är ett reellt tal som dessutom är större än eller lika med noll. Observera också att

$$z \cdot \bar{z} = (-2 + 5i) \cdot (-2 - 5i) = (\text{Konjugatregeln!}) = (-2)^2 - (5i)^2 = (-2)^2 + 5^2 = 29$$

och vi har generellt den praktiska formeln $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. (♥)

Övning 2. Visa att den just angivna formeln gäller.

Övning 3. Använd formeln (♥) för att visa $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, (dvs. “beloppet av en produkt är lika med produkten av beloppen.”)

Exempel 3. Bestäm på formen $a + bi$ det komplexa talet $z_0 = \frac{2-i}{1+3i}$.

Principen vid division är att förlänga med *nämnares konjugat* för att få en reell nämnare:

$$\frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-1-7i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7i}{10}.$$

Vi ser att t.ex. $Re(z_0) = -\frac{1}{10}$, $Im(z_0) = -\frac{7}{10}$ och

$$|z_0| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Övning 4. Visa att man lika gärna kan beräkna $|z_0|$ genom att först bestämma beloppet för täljaren och nämnaren var för sig och sedan ta kvoten mellan dem! (Eller: “beloppet av en kvot är kvoten av beloppen!”.)

Här kommer ytterligare ett par exempel:

Exempel 4: Vilka komplexa tal z uppfyller $z + \bar{z} = 2$?

Lösning: Vi delar först upp z i realdel och imaginärdel: $z = x + iy$. Då är $\bar{z} = x - iy$ och den givna likheten blir:

$$z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow (x + iy) + (x - iy) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Likheten uppfylls alltså av alla komplexa tal med realdel 1 och godtycklig imaginärdel. I det komplexa talplanet (se avsnitt 2) svarar detta mot punkter som ligger på en lodrät linje genom punkten $x = 1$ på reella axeln.

Exempel 5: Vilka komplexa tal z uppfyller $2z = \bar{z} - 1 + 3i$?

Lösning: Som i föregående problem sätter vi $z = x + iy$ i likheten och får då:

$$2z = \bar{z} - 1 + 3i \Leftrightarrow 2(x + iy) = (x - iy) - 1 + 3i \Leftrightarrow 2x + 2yi = (x - 1) + i(3 - y) \quad (*)$$

Vi använder oss nu av det viktiga faktum att:

Två komplexa tal är lika precis när de har samma realdel och samma imaginärdel.

Detta leder till att vi ur den komplexa likheten (*) ovan får två reella:

$$\begin{cases} 2x = x - 1 \\ 2y = 3 - y \end{cases}$$

Den första ekvationen ger: $x = -1$ medan den andra ger: $y = 1$. Svaret på uppgiften är alltså att likheten uppfylls av ett enda komplext tal, nämligen $z = -1 + i$.

2. Det komplexa talplanet.

Som nämdes i inledningen blev de komplexa talen inte allmänt accepterade förrän man under åren kring 1800 upptäckte att man kunde representera dem geometriskt, nämligen som punkter i planet, samt att man på ett åskådligt sätt kan tolka begrepp som absolutbelopp och konjugat och operationer som addition och subtraktion. Mer konkret går det till så att vi börjar med ett helt vanligt rätvinkligt koordinatsystem i två dimensioner. Vi kallar x -axeln för *den reella axeln*, y -axeln för *den imaginära axeln* och det komplexa talet $z = x + iy$ representeras helt enkelt av punkten (x, y) . Så kommer t.ex. de reella talen, dvs. de som har imaginärdel 0 att ligga på x -axeln medan punkterna på y -axeln representerar de tal som saknar realdel (och som säges vara *rent imaginära*), t.ex. talen $i, 2i$, och $-i$.

Övning 5. Om $z = 4 + i$, rita i det komplexa planet de punkter som svarar mot talen $z, \bar{z}, -z$ och iz .

Övning 6. Rita upp de komplexa tal som uppfyller ekvationen i Exempel 4 ovan.

Slutligen vill jag påpeka att beloppet av ett komplext tal har en naturlig geometrisk tolkning. Vi har ju att om $z = x + iy$ så är $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och enl. avståndformeln i planet (eller om man så vill Pythagoras sats) får vi:

Beloppet av ett komplext tal är lika med avståndet mellan talet och origo.

Exempel 6: Bestäm de punkter z i komplexa planet som uppfyller $|z| = 5$.

Lösning: Det inramade påståendet säger direkt att likheten uppfylls av de punkter vars avstånd till origo är 5, dvs. det är alla punkter som ligger på cirkeln med medelpunkt origo och radie 5.

Exempel 7: Motsvarande problem för $|z - (2 + i)| = 1$.

Lösning: Om vi sätter $z = x + iy$ får vi

$$|z - (2 + i)| = |(x - 2) + i(y - 1)| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2},$$

och ekvationen blir efter kvadrering $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$, som ju beskriver en cirkel med medelpunkt i $(2, 1)$ och radie 1.

3. Rotutdragning.

Ni känner alla till hur man löser andragradsekvationer; det sker oftast via "p, q-formeln". Denna i sin tur härleds genom att man med hjälp av *kvadratkomplettering* reducerar ekvationen till den enklaste typen av andragradsekvation, nämligen den som har utseendet $x^2 = a$. Metoden för att lösa andragradsekvationer fungerar precis lika bra om man har koefficienter som är komplexa tal, men då uppstår problemet om och i så fall hur man kan skriva ett tal, exempelvis $\sqrt{7 - 24i}$ på formen $a + bi$ (se nedan). Vidare kan man inte som i fallet med rotutdragning av positiva reella tal ge kvadratroten en entydig mening genom att välja den positiva reella roten: det finns, som vi såg ovan, inga positiva komplexa tal. Det kan man motivera geometriskt genom att observera att origo delar upp tallinjen i två delar, de positiva talen och de negativa talen, men om man tar bort origo från det komplexa talplanet kan man gå från ett komplext tal till ett annat "utan att passera origo"!

Åter till frågan ovan: om vi tar ett komplext tal t.ex. $7 - 24i$, finns det då ett annat komplext tal z så att $z^2 = 7 - 24i$? Vi vet ju nu att man kan dra roten ur negativa tal och att resultatet blir ett komplext tal, vi har t.ex. att $\sqrt{-1} = i$ och $\sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot (-1)} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{7}$. Kommer man att behöva gå vidare och utvidga talsystemet ytterligare när man drar roten ur t.ex. talet i ? Nej, det behövs inte och det är ett av skälen till att de komplexa talen bildar en slags slutpunkt. I själva verket är det ett specialfall av *algebrans fundamentalsats*, som säger att varje polynomekvation, t.o.m. med komplexa koefficienter har komplexa rötter.

Processen för att finna kvadratrötter är följande:

Exempel 8: Beräkna $\sqrt{7 - 24i}$.

Lösning: Vi söker två reella tal a och b sådana att

$$\sqrt{7 - 24i} = a + bi \Rightarrow 7 - 24i = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 \Leftrightarrow 7 - 24i = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Vi vet nu att två komplexa tal är lika om och endast om det har samma real- och imaginärdelar, detta ger oss följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24. \end{cases}$$

Detta system löses enklast genom att man löser ut ex.vis a ur den andra ekvationen (och får $a = -12/b$) och sätter in detta a i den första. Då får vi

$$\left(\frac{-12}{b}\right)^2 - b^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{144}{b^2} - b^2 = 7 \Leftrightarrow b^4 + 7b^2 - 144 = 0.$$

Denna fjärdegradsekvation löses genom att vi gör variabelbytet $t = b^2$ varvid vi får en andragradsekvation i t :

$$t^2 + 7t - 144 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 144} = \frac{7}{2} \pm \frac{25}{2} \Leftrightarrow t = 9 \text{ eller } t = -16.$$

Den ena roten, $t = -16$ är ointressant eftersom t måste vara positiv, den är ju kvadraten på ett reellt tal, nämligen b . Den andra roten, $t = 9$ ger $b = \pm 3$ och återinsättning ger slutligen $a = \mp 4$, (observera att positivt b ger negativt a och omvänt! Detta följer ur ekvationen $2ab = -24$ ovan som ju visar att a och b måste ha olika tecken). Så slutresultatet blir alltså:

$$\sqrt{7 - 24i} = \pm(4 - 3i).$$

Observera också att det är lätt, och en bra övning, att kontrollera att svaret är korrekt (hur?).

Kompletterande övningsuppgifter:

- Om $z = 2 + 5i$ och $w = -3 + 4i$, beräkna
 - $z + w, z \cdot w, z/w$.
 - $|z|, |w|$ och $|z + w|$. (Reflektera över resultatet!)
- Beräkna och rita in i komplexa planet
 - i^{2181}
 - $\sqrt{8 - 6i}$
 - $\sqrt{-3 + 4i}$.
- Illustrera i komplexa talplanet mängden av tal som uppfyller:
 - $|z| = 2$,
 - $z + \bar{z} = 2$,
 - $Re(z + i\bar{z}) = 1$,
 - $|z + 1 - i| = 2$.
- Beräkna absolutbeloppet av (använd resultatet i Övning 3 och 4 ovan)
 - $(1 + i)^{20}$,
 - $\frac{(2-i)^{10}}{(3+4i)^5}$.

Gunnar