

Summor, produkter och induktion

1 Uttryck följande summor med hjälp av summasymbolen \sum

a) $1 - 3 - 7 - 11 - 15 - 19$

b) $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23$

c) $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$

d) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$

e) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

f) $\frac{1}{2} - 1 + 2 - 4 + \dots + 32$

2 Uttryck följande summor utan summatecknet \sum

a) $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k(k+1)}$

b) $\sum_{p=1}^9 (p^2 - 6p - 2)$

c) $\sum_{i=4}^8 (i! - (i-1)!)$

d) $\sum_{n=1}^k \frac{k-n}{n}$

3 Beräkna följande produkter

a) $5! \cdot 1!$

b) $\prod_{k=2}^4 \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

c) $\prod_{p=0}^{11} 2$

d) $\prod_{i=999}^{1111} (-1)^{-i}$

4 Bevisa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

5 Visa med induktion att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

6 Visa med induktion att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

7 Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n k^2 < n^3$$

för $n > 1$.