UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen
BASKURS I MATEMATIK
2007-09-18

Skrivtid: 9-14. Inga hjälpmedel tillåtna. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betyg 3 (eller 4 resp. 5) krävs minst 18 (eller 25 resp. 32) poäng. Om du är godkänd på duggan, ska du inte lämna in uppgift 1.

1. Lös ekvationen $\log_8(x^2 + 6x) = \log_2 x$.

2. a) Skriv upp ekvationen för cirkeln med medelpunkten $(-1, 3)$ och radien 2.
   b) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna $(1, -2)$ och $(-2, 1)$.
   c) Visa att ekvationen $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 50 = 0$ beskriver en cirkel samt bestäm dess medelpunkt och radie.

3. a) Förenkla så långt som möjligt $\log_2 10 + 2\log_2 12 - \log_2 45$.
   b) Lös ekvationen $e^{3x} - 3e^{2x} = 0$.
   c) Skriv det komplexa talet $z = \dfrac{5+i}{2+3i}$ på formen $a + bi$ där a och b är reella tal.
   d) Bestäm belopp och argument för talet $z = -3 + 3i\sqrt{3}$.

4. Lös ekvationen $\sqrt{17 - 8x} = 2x + 1$.

5. Bestäm alla lösningar i intervallet $0 \leq x < 2\pi$ till ekvationen

$$\cos 2x + \sin 4x = 0.$$

6. Visa med induktion att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

   för alla heltal $n \geq 1$.
   För full poäng måste alla ingredienser i induktionsbeviset tydligt anges.

7. Lös den binomiska ekvationen $z^6 = -64$. Skriv också polynomet $f(z) = z^6 + 64$ som en produkt av reella polynom av så låg grad som möjligt.

8. Ekvationen $z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 = 0$ har en rot som ligger på den imaginära axeln, dvs av formen ai för något reellt tal a. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen.

LYCKA TILL !

SVAR

1. Obs: Vi måste ha $x > 0$. Vi har $\log_8(x^2+6x) = \dfrac{\log_2(x^2+6x)}{\log_2 8}$, så ekvationen kan skrivas $\log_2(x^2+6x) = \log_2 x^3$. För $x > 0$ är det ekvivalent med att $x^2+6x = x^3$. Denna ekvation har rötterna $x = -2$, $x = 0$ och $x = 3$. Men -2 och 0 måste uteslutas, varför den enda lösningen till ekvationen är $x = 3$. **SVAR:** $x = 3$.

2. a) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$. b) $y = -x-1$. c) Kvadratkomplettering ger $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 3$, dvs. en cirkel med medelpunkt $(2,-7)$ och radie $\sqrt{3}$.

3. a) 5. b) $x = \ln 3$. c) $1-i$. d) $|z| = 6$, $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. Kvadrering av båda leden och förenkling ger ekvationen $x^2+3x-4 = 0$, som har rötterna $x = -4$ och $x = 1$. Dessa måste kontrolleras i den givna ekvationen. $VL_{x=-4} = \sqrt{17-8(-4)} = \sqrt{49} = 7$, och $HL_{x=-4} = 2(-4)+1 = -7$. Så $x = -4$ är inte en lösning. Vidare, $VL_{x=1} = \sqrt{17-8} = \sqrt{9} = 3$, och $HL_{x=1} = 2\cdot 1+1 = 3$. Så $x = 1$ är en lösning. **SVAR:** $x = 1$.

5. Eftersom $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ kan ekvationen skrivas $\cos 2x\cdot(1+2\sin 2x) = 0$, dvs. $\cos 2x = 0$ eller $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$. Men $\cos 2x = 0 \iff 2x = \dfrac{\pi}{2}+n\pi \iff x = \dfrac{\pi}{4}+n\dfrac{\pi}{2}$. Och $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \iff 2x = -\dfrac{\pi}{6}+n2\pi$ eller $2x = -\dfrac{5\pi}{6}+n2\pi \iff x = -\dfrac{\pi}{12}+n\pi$ eller $x = -\dfrac{5\pi}{12}+n\pi$. Lösningar i intervallet $0 \leq x < 2\pi$ är:

   SVAR: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$.

6. Bas: $VL_1 = 2$, och $HL_1 = 0+2 = 2$, så påståendet stämmer för $n = 1$.
   Induktionsantagande (I.A.): $1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + p\cdot 2^p = (p-1)2^{p+1}+2$, dvs. $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.
   Induktionssteg: Vi måste visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har

$$
\begin{aligned}
VL_{p+1} &= 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + p\cdot 2^p + (p+1)2^{p+1} = VL_p + (p+1)2^{p+1} \\
&= [\textit{enligt I.A.}] = HL_p + (p+1)2^{p+1} = (p-1)2^{p+1} + 2 + (p+1)2^{p+1} \\
&= 2^{p+1}(p-1+p+1) + 2 = 2p\cdot 2^{p+1} + 2 = (p+1-1)\cdot 2^{p+1+1} = HL_{p+1}.
\end{aligned}
$$

   Enligt induktionsaxiomet följer nu att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$.

7. Ansätt $z = re^{i\Theta}$. De Moivres formel ger $z^6 = r^6 e^{6i\Theta}$. Vi har även $-64 = 64e^{i\pi}$. Det följer att $r^6 = 64$, dvs $r = 2$, och att $6\Theta = \pi + n2\pi$, dvs $\Theta = \dfrac{\pi}{6}+n\dfrac{\pi}{3}$. Lösningarna blir $z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3}+i$, $z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i$, $z_2 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}+i$, $z_3 = \overline{z_2} = -\sqrt{3}-i$, $z_4 = \overline{z_1} = -2i$ och $z_5 = \overline{z_0} = \sqrt{3}-i$. Använd de parvis konjugerade rötterna för att få reella andragradsfaktorer: $z^6+64 = (z^2-2\sqrt{3}z+4)(z^2+2\sqrt{3}z+4)(z^2+4)$.

8. Ekvationen har endast reella koefficienter, så även $-ai$ är en rot. Polynomet måste enligt faktorsatsen vara delbart med $(z-ai)(z+ai) = z^2+a^2$. Ansätt $z^4+z^3+3z^2+4z-4 = (z^2+a^2)(z^2+Bz+C)$. Identifikation av koefficienter ger att $B = 1$, $a^2 = 4$ och $C = -1$. Ekvationen kan alltså skrivas $(z^2+4)(z^2+z-1) = 0$.

   Den högra parentesens nollställen är $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   SVAR: $z = \pm 2i$ eller $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.