BASKURS
12.10 2007

LÖSNINGAR

1a)

$$\sqrt{7-3x} = x+1 \Rightarrow 7-3x = (x+1)^2 \Leftrightarrow 7-3x = x^2+2x+1 \Leftrightarrow$$

$$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+6)=0 \Leftrightarrow (x=1) \vee (x=-6) \\ x=-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

<u>Prövning</u> $x=1$: $\sqrt{7-3} = 2$ ok

$x=-6$: $\sqrt{25} = -5$ ej ok

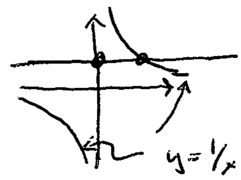
<u>Svar</u>: $\boxed{x=1}$

b)

$$\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0$$

x	$-$	0	$+$	1	$+$
$1-x$		$+$		0	$-$
$\frac{1-x}{x}$	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$

<u>Svar</u>: $\boxed{\begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}}$



c)

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2 = 3^2 \\ x^2+2x+y^2-4y = 4 \end{cases}}$$ <u>Svar</u>.

2.

$$(e^{2x}-1)(\ln(2x+3) - 2\ln(x+1)) = 0$$

i) $e^{2x}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ <u>Prövning</u>. VL definierad!

ii) $\ln(2x+3) - 2\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x+3) - \ln(x+1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \ln \frac{2x+3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{(x+1)^2} = 1 \\ \ln(2x+3) = \ln(x+1)^2 \end{cases}\right\} (x+1)^2 = 2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

<u>Prövn</u>: e^{2x} def.

$2x+3$ ok

$x+1 \begin{cases} >0 & x=\sqrt{2} \text{ ok} \\ <0 & x=-\sqrt{2} \text{ ej ok} \end{cases}$

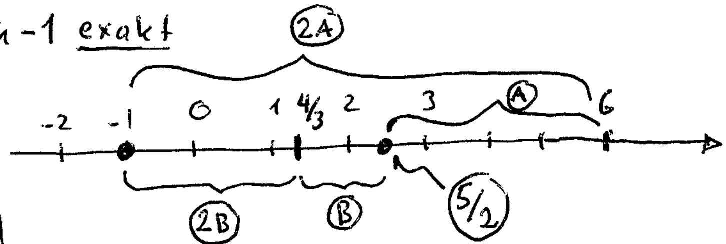
<u>Svar</u>: $\boxed{x=0,\ x=\sqrt{2}}$

3. $$\left|\frac{x+1}{2x-5}\right| < 1 \qquad (1)$$

ALT. 1

$$(1) \iff |x+1| < |2x-5| \iff |x+1| < 2\,|x - 5/2|$$

(GEOMETRISKT RESONEMANG.) Var är avståndet mellan x och −1 exakt dubbelt så stort som mellan x och $5/2$?



ALTERNATIV 2.

$$(1) \iff \boxed{-1 \overset{i)}{<} \frac{x+1}{2x-5} \overset{ii)}{<} 1}$$

i) $$\frac{x+1}{2x-5} > -1 \iff \frac{x+1}{2x-5} + 1 > 0 \iff \frac{x+1+2x-5}{2x-5} > 0 \iff \frac{3x-4}{2x-5} > 0$$

$$\iff \underbrace{\frac{3(x-4/3)}{2(x-5/2)}}_{\alpha} > 0$$

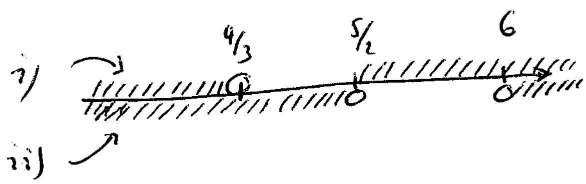
x		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$	
$x-4/3$	−	0	+		
$x-5/2$			−	0	+
α	+	0	−	$\wr$	+

Delsvar 1: $x < \frac{4}{3}$, $x > \frac{5}{2}$

ii) $$\frac{x+1}{2x-5} < 1 \iff \frac{x+1}{2x-5} - 1 < 0 \iff \frac{x+1-(2x-5)}{2x-5} < 0 \iff \underbrace{\boxed{\frac{6-x}{2(x-5/2)} < 0}}_{\beta}$$

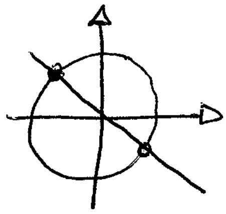
x		$5/2$		6	
$6-x$			+	0	−
$x-5/2$	−	0	+		
β	−	$\wr$	+	0	−

Delsvar 2: $x < 5/2$ $x > 6$



SVAR: $\boxed{x < \frac{4}{3} \text{ eller } x > 6}$

4. a) "Ser" $\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}}$



eller: $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\quad y=-x \quad (1)$

$x^2+(-x)^2=1 \Leftrightarrow 2x^2=1$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. (1) ger $y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$: $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\boxed{\theta = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi}$

$\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4} + n\pi}$

Alt. $\cos\theta + \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\sin\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \sin(-\theta)$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) \Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

i) $\left(\theta = \frac{\pi}{2} + \theta + 2n\pi,\right)$ (ger ingen lösning)

ii) $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + 2n\pi$

$2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

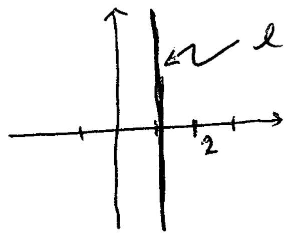
$\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4} + n\pi}$

5. a) $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $|z-2| = |z|$ (1)

AVST. TILL 2 = AVST. TILL 0.

$\underline{z = 1 + it}$ ℓ.



Alt. $|z-2| = |(x+iy)-2| = |(x-2)+iy| = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

(1) $\Leftrightarrow x^2+y^2 = (x-2)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2-4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Svar: $\boxed{z = 1 + it,\ t \in \mathbb{R}}$

6. $n^3 - n = n(n^2-1) = \underbrace{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}_{\text{ett av dessa är delbart med 3.}}$ (4.)

Alt. 1

Alt. 2

Induktion: $n=1$ ger $n^3-n = 1^3-1=0$ och 0 är delbart med 3 $(0=0\cdot 3)$.

Antag att 3 delar $n_0^3 - n_0$ $\quad (3 \mid n_0^3-n_0) \quad (*)$

Hur är det då med $(n_0+1)^3-(n_0+1)$?

Jo: $(n_0+1)^3-(n_0+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{BINOMIAL-} \\ \text{UTV.}}}{=} (n_0^3+3n_0^2+3n_0+1)-(n_0+1) =$

$= (n_0^3-n_0) + 3n_0^2+3n_0 = \underbrace{(n_0^3-n_0)}_{\text{I}} + \underbrace{3\cdot(n_0^2+n_0)}_{\text{II}}$

I är delbart med 3 enl. ind. antagandet $(*)$

II är delbart med - det syns ju.

SLUTSATS: Om $n_0^3-n_0$ är delbart med 3 gäller detsamma för $(n_0+1)^3-(n_0+1)$

Enl. Induktionsprincipen gäller då utsagan för alla $n \geq 1$. $\square$.

7. a) Vilka tre som helst av de 24 eleverna kan komma till final och ordningen: etta, tvåa, trea spelar roll. Så vi får (multiplikationsprincipen)

$\boxed{24 \cdot 23 \cdot 22}$ möjliga slutresultat. (12 144)

b) Här gäller det att välja ut 3 av 24. $\boxed{\binom{24}{3}}$ (2 024)

c) Om vi vet att n är med kan de två andra väljas på $\boxed{\binom{23}{2}}$ sätt. (253)

Svar a) 12144 sätt. $(24 \cdot 23 \cdot 22)$

b) 2024 grupper $\left(\binom{24}{3}\right)$

c) 253 grupper $\left(\binom{23}{2}\right)$.

8. Om roten är $z = ai$, a reell, och den insättes i ekvationen, fås

$$(ia)^5 + 9(ia)^3 - 8(ia)^2 - 72 = 0 \iff$$

$$i \cdot a^5 - i \cdot 9a^3 + 8a^2 - 72 = 0 \iff (8a^2 - 72) + i(a^5 - 9a^3) = 0$$

Både real- och imaginärdelen måste vara noll!

$$\begin{cases} 8a^2 - 72 = 0 \\ a^5 - 9a^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - 9 = 0 \\ a^3 \cdot (a^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Så vi har $a^2 - 9 = 0$ dvs. $\underline{a = \pm 3}$.

Då är polynomet delbart med $(z - 3i)(z - (-3i)) = (z - 3i)(z + 3i) =$
$= \underline{z^2 + 9}$. (Faktorsatsen)

$$z^5 + 9z^3 - 8z^2 - 72 = (z^2 + 9)(z^3 - 8) \;!$$

Återstår att lösa den binomiska ekvationen $\underline{z^3 - 8 = 0}$ (4)

— X —

Alt. 1 "ser" att $z=2$ är en rot. <u>Faktorsatsen</u>

$$z^3-8=(z-2)\cdot(z^2+2z+4)$$

$$z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{1^2-4}=-1\pm\sqrt{-3}=\underline{-1\pm i\sqrt{3}}$$

Alt. 2 Skriv (4) på <u>polär form</u>

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) \quad \text{(de Moivre)}$$

$$8=8(1+0\cdot i) \Rightarrow 8=8(\cos 0+i\sin 0)$$

Så (4) blir

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=8(\cos 0+i\sin 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^3=8 \\ 3\theta=0+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2\,! \end{cases}$$

$$z_0=2(\cos 0+i\sin 0)=\underline{2}$$

$$z_1=2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{-1+i\sqrt{3}}$$

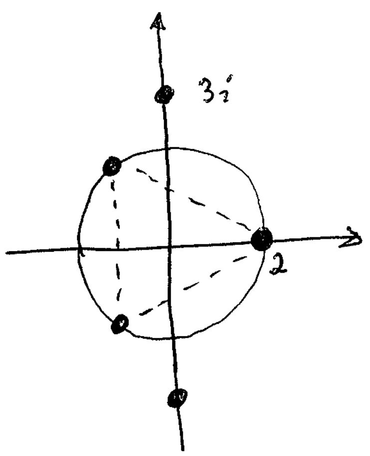
$$z_2=2\left(\cos\tfrac{4\pi}{3}+i\sin\tfrac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{-1-i\sqrt{3}}$$

(Alt. 3)

$$z^5+9z^3-8z^2-72=0 \Leftrightarrow$$

$$z^3(z^2+9)-8(z^2+9)=0 \Leftrightarrow$$

$$\underline{(z^2+9)\cdot(z^3-8)=0} \quad \text{etc. som ovan.}$$



<u>Svar</u>: Rötterna är

$$\begin{cases} z=\pm 3i \\ z=2 \\ z=-1\pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

— X —